Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2011

MARIA DULCE DE OLIVEIRA HENRIQUES GONÇALVES ABREU

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA DE SEBASTIÃO E SILVA: CÁLCULO DIFERENCIAL

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2011

MARIA DULCE DE OLIVEIRA HENRIQUES GONÇALVES ABREU

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA DE SEBASTIÃO E SILVA: CÁLCULO DIFERENCIAL

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Didáctica, ramo de especialização em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, realizada sob a orientação científica do Doutor Helmuth Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho ao meu marido e às minhas filhas pelo incansável apoio.

o júri

presidente

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
professora auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maria Cecília Rosa Pereira Peixoto da Costa
professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Professor Doutor Helmuth Robert Malonek
professor catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Os meus agradecimentos vão para todas as pessoas e entidades que de uma forma directa ou indirecta contribuíram para a realização desta tese de mestrado, em especial para o meu orientador Professor Doutor Helmuth Malonek.

palavras-chave

Cálculo Diferencial, Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva, Matemática Moderna, Reformas do Ensino em Portugal.

Resumo

O presente trabalho pretende fazer um estudo, numa perspectiva histórica e didáctica, do Cálculo Diferencial no Ensino da Matemática em Portugal, tendo como ponto de partida o Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva e como pano de fundo a Matemática Moderna. Seguindo esta perspectiva e após referência aos temas tratados no Compêndio de Matemática, o estudo deste trabalho focaliza-se na abordagem do Cálculo Diferencial nesta importante obra. O trabalho contempla uma menção às sucessivas reformas do Ensino em Portugal desde o início do século XX até aos nossos dias, acompanhando as alterações do lugar que ocupa o Cálculo Diferencial no Ensino Secundário, antigamente designado por Ensino Liceal. O estudo do modo como o Cálculo Diferencial tem sido abordado noutros manuais desde a edição do Compêndio de Matemática até à actualidade também é analisado e finaliza o trabalho. Foram analisados quatro manuais escolares portugueses de décadas diferentes e usados nessa altura nas escolas.

Keywords

Differential Calculus, Sebastião e Silva's Compêndio de Matemática, Modern Mathematics, teaching mathematics, education reforms in Portugal.

Abstract

The aim of this thesis is the study, from a historical and didactic perspective, of the teaching of Differential Calculus in Portugal, taking Sebastião e Silva's "Compêndio de Matemática" (Compendium of Mathematics) as a starting point and having Modern Mathematics as background. After mentioning the main aspects comprised in the book "Compêndio de Matemática", this study focuses on the approach to Differential Calculus present in this important work. The thesis includes also aspects of the education reforms in Portugal since the 20th century to the present day, describing the modifications of the role of Differential Calculus in the programs taught at secondary schools, formerly known as lyceums. The study on how Differential Calculus has been taught since the edition of the book "Compêndio de Matemática" until the present day is also present in this study and four widely-used Portuguese textbooks from different decades have been analyzed.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

“ A análise infinitesimal é, sem dúvida, uma das mais belas e úteis criações do espírito, impondo-se quer pela elegância e fecundidade dos métodos, quer pela importância das aplicações.” (Silva, 1978).

Ao longo da sua história no ensino da Matemática em Portugal, o Cálculo Diferencial nem sempre teve a importância que hoje em dia todos lha reconhecem. O caminho percorrido desde o início do século XX quando entrou timidamente pela primeira vez num programa de Matemática até à magnitude alcançada actualmente foi feito de avanços e recuos até alcançar o seu merecido destaque no Ensino da Matemática.

Nos anos sessenta, a importância do Cálculo Diferencial já era de tal modo unanimemente reconhecida que este tema fazia parte da chamada Matemática Clássica em oposição à Matemática Moderna entretanto introduzida em Portugal em 1963, pelo ilustre matemático Sebastião e Silva.

Não fazendo parte dos novos temas introduzidos pela reforma da Matemática Moderna, Sebastião e Silva nutre, no entanto, um especial apreço por este tema como reflecte o seu comentário na revista Gazeta de Matemática: *“ A análise infinitesimal é o ramo da matemática que maior êxito tem alcançado nas aplicações às ciências da natureza, e é por isso, também, o mais extenso, o mais rico, o mais fecundo, deixando a perder de vista a álgebra ou a geometria.”* (Silva, 1950). Não é pois de admirar a existência de um capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial no Compêndio de Matemática, manual redigido por Sebastião e Silva no âmbito da experiência de modernização do Ensino da Matemática em Portugal. Tendo o Compêndio de Matemática surgido num contexto de mudança do Ensino da Matemática em Portugal, impõe-se um olhar histórico, observador e atento a este movimento reformador do Ensino da Matemática que dá pelo nome de Matemática Moderna. No entanto, é no capítulo de “Introdução ao Cálculo Diferencial” que, numa perspectiva histórica e didáctica, o presente trabalho irá centrar o seu estudo, mas não sem antes fazer uma abordagem geral a este magnífico manual.

Este trabalho será enriquecido com o estudo das sucessivas reformas do ensino em Portugal, desde o início do século XX até aos nossos dia, com particular destaque para o ano de 1905, ano em que foi introduzido pela primeira vez o conceito de derivada no programa de matemática. Neste estudo será analisado todo o caminho percorrido pelo Cálculo Diferencial referido no início da presente introdução.

O estudo do modo como o Cálculo Diferencial tem sido abordado nos manuais escolares portugueses desde a edição do Compêndio de Matemática até aos nossos dias também foi contemplado neste trabalho. A análise debruçou-se sobre quatro manuais de décadas diferentes e com grande divulgação na altura. Um desses manuais trata-se do Compêndio de Álgebra que não sendo posterior ao Compêndio de Matemática era o livro único da altura, sendo Sebastião e Silva seu co-autor juntamente com J.D. da Silva Paulo, trazendo por isso um interesse extra à sua análise.

2. O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

2.1. Introdução

As alterações políticas e económicas surgidas após a Segunda Guerra Mundial fizeram com que nos EUA e em muitos países da Europa fossem tomadas medidas significativas no combate à descriminação no acesso à educação e no aumento da escolaridade obrigatória com o objectivo de haver uma igualdade de oportunidades para todos e onde o estatuto individual dependesse *"…apenas das capacidades e do mérito particular de cada um…"* (Sebastião, 2002). Segundo Valente "*O fim da Segunda Guerra Mundial representa um marco basilar para os estudos das modificações trazidas à vida social a partir do enorme desenvolvimento científico e tecnológico conseguido durante os anos de guerra."* (Valente, 2006). A implementação de medidas de alargamento da escolaridade obrigatória, juntamente com a percepção que a escola é um meio de alcançar e manter posições sociais prestigiadas, conduziu a uma rápida massificação do ensino na escolaridade básica que progressivamente se alargou ao ensino secundário. Este processo teve uma conjectura muito favorável pois com o elevado crescimento económico do pós-guerra surgiram pela primeira vez diversos tipos de apoios educativos para que a sua concretização fosse efectiva. A expansão da escolaridade *"Antes de mais tornou, para estes países, mais próxima a ideia inicial de acesso universal ao saber e à cultura erudita. Em segundo lugar abriu efectivamente caminho a processos de mobilidade social ascendente para muitos e criou a ilusão da sua possibilidade para outros ainda mais numerosos, que por essa razão foram atraídos para escolaridades mais longas. Por último, trouxe para a escola grupos que até aí dela estavam afastados ou não passavam dos níveis mais elementares do sistema educativo, maioritariamente possuidores de representações da escola geralmente negativas e baixas aspirações no que respeitava à continuidade dos estudos."* (Sebastião, 2002).

A nível do ensino *"... surgem movimentos internacionais de reforma, que buscam colocar os ensinos escolares em fase com o desenvolvimento científico* *que os anos pós-guerra passam a viver. Nesse sentido, toda a atenção é dada às modificações das disciplinas escolares Matemática, Física, Química e Biologia*." (Valente, 2006)

Os anos seguintes à guerra constituíram o tempo a que vulgarmente é dado o nome de Guerra Fria onde as actividades pioneiras no campo espacial revelam uma supremacia cientifica da União Soviética em relação ao bloco ocidental que fez com que "*fossem canalizados enormes recursos financeiros para a reorganização do ensino científico. Assim, com financiamento internacional, são realizados inúmeros congressos, encontros, visitas e estágios, além da criação de grupos de estudos locais e estrangeiros, com a perspectiva de elaboração de um novo ensino de ciências e de matemática*." (Valente, 2006).

Cerca de cinquenta anos mais tarde que o primeiro movimento internacional[1] surge o Movimento da Matemática Moderna com o objectivo de internacionalizar, novamente, uma nova proposta de Ensino da Matemática. Os Matemáticos elaboram um novo programa de ensino, uma nova matemática escolar que procura diminuir a distância entre o saber dos matemáticos e o saber dos currículos escolares. Para isso é necessário que professores, pais e alunos compreendam que tudo o que aprenderam até então em matemática deve ser mudado para uma Matemática Moderna.

É designada por Matemática Moderna uma reforma curricular que "*ocorreu em vários países do ocidente (Estados Unidos, Países da Europa e América Latina, entre outros) e do oriente (alguns países árabes)*" (Oliveira, 2008) entre a segunda metade dos anos 50 e a primeira metade dos anos 70 do século XX. Consiste num movimento que procura principalmente renovar o Ensino da Matemática.

Este movimento preconizava a teoria de conjuntos, a estrutura e a linguagem matemática. Com o objectivo de preparar os futuros cidadãos para a vida activa, ainda defendia a inclusão de temas abordados na disciplina de matemática da universidade no currículo do ensino secundário como a álgebra moderna, a

[1] Em 1908 foi realizado em Roma o IV Congresso Internacional de Matemática que teve como resultado a primeira proposta de internacionalização do ensino da matemática, a partir da criação de uma comissão internacional para fazer um levantamento da educação matemática praticada nos diferentes países.

topologia, as transformações lineares e a extensão a teoria de conjuntos aos primeiros anos do ensino básico. O Movimento da Matemática Moderna considerava importante o acesso precoce dos alunos às grandes estruturas (na álgebra moderna: conjuntos, relações e aplicações, grupos, anéis e corpos e na álgebra linear: utilização de espaços vectoriais em geometria) e aos símbolos lógicos. A justificação dos apoiantes da Matemática Moderna para apoiar essa ideia tinha em conta, segundo Mahamed Akkar, as considerações seguintes: *"Le symbolisme et les strutures fournissent un langage sûr, simple e rigoureux. L'étude dês strutures développe la formation intelectuelle, la carte d'esprit et de pensé et la rigueur du jugement."*[2] (Akkar, 2002).

"Neste movimento foi determinante a influência da perspectiva formalista da Matemática, particularmente na sua versão bourbakista[3]*"* (Ponte, 2003). Uma das características da Matemática Moderna era pensar que se um aluno conhecesse os fundamentos da estrutura do edifício matemático, conjuntos, relações e suas propriedades, conseguiria construir todos os outros conceitos matemáticos. Portanto, o aspecto que distinguia este novo currículo de matemática era a reformulação da matéria habitual da matemática praticada nas escolas em termos de teoria de conjuntos. Uma outra característica é que havia uma *"...preocupação em compatibilizar os currículos da Matemática com os trabalhos de Jean Piaget, que precisamente continham uma descrição dos processos de aprendizagem muito próxima das estruturas Bourbakistas."* (Matos, 2006).

2.2. A Matemática Moderna como movimento reformador do ensino

Em 4 de Outubro de 1957, a União Soviética lança com êxito o primeiro satélite artificial da Terra denominado Sputnik. Este sucesso provoca um grande alvoroço no seio da Comunidade Matemática. Este alvoroço atinge também a sociedade americana questionando-se a preparação técnica dos seus quadros. Os EUA

[2] Tradução própria: O simbolismo e as estruturas fornecem uma linguagem certa, simples e rigorosa. O estudo das estruturas desenvolve a formação intelectual, a clareza de espírito e do pensamento e o rigor do julgamento.

sente uma necessidade de formar engenheiros e cientistas para se puder equiparar à tecnologia soviética. Pedagogicamente, há uma necessidade de se proceder à modernização do Ensino da Matemática e das Ciências. É então que em 1958 é constituído pela American Mathematical Society o programa americano mais conhecido: o SMSG – School Mathematics Study Group e que foi dirigido pelo matemático e professor Edward G. Begle. Este programa foi o resultado de duas conferências de matemáticos realizadas em Chicago e Bóston, respectivamente.

No entanto, já em 1957, tinha sido desenvolvido o Projecto Madison dirigido por Robert Davis. Este projecto aplicava muitas das ideias de Jerome Bruner, o proclamado pai da Psicologia Cognitiva, principalmente, quando destaca o método da descoberta e a utilização de materiais manipuláveis no ensino. Também nesse ano, aparecia o projecto UMMAP – University of Mathematics Project, orientado pelo pesquisador e professor Robert Gagné. Este projecto tinha como objectivo identificar e ordenar os objectivos comportamentais da Matemática e transpô-los para um currículo.

Foi, no entanto, o SMSG quem desencadeou uma nova mudança no Ensino da Matemática, ao promover a integração de novos temas na escola elementar como por exemplo a Geometria Informal, Probabilidades, Álgebra e Teoria dos Números. Os Conjuntos eram o tema unificador. Os documentos que serviam de apoio a este programa eram escritos, na sua maioria, por matemáticos mas também por alguns professores.

No seguimento destes grupos, nasceram outros apoiados por diversas instituições focalizando as suas ideias no facto do Ensino da Matemática estar mal devido ao currículo tradicional preconizar matemática antiquada sendo portanto imperativo que este ofereça novos campos.

Na Europa, era nos congressos internacionais que se elaboravam as propostas para a mudança do Ensino da Matemática nos liceus. Esses congressos eram financiados principalmente pela OECE-Organisation Européene de Coopération

---

[3] Nicolas Bourbaki é o pseudónimo dado a um grupo de matemáticos constituído na sua maior parte por franceses que redigiram vários livros onde escreviam sobre Matemática Moderna. Os cinco membros fundadores foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil.

Economique (actual OCDE-Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económico) e pela NSF- National Science Foundation, dos Estados Unidos da América.

Segundo Matos, *“Costuma ser indicada como marco temporal do início desta reforma o ano de 1959.”* (Matos, 2006) pois foi neste ano que a OECE, organizou um colóquio internacional de duas semanas com 60 professores de 20 países em Rayaumont para “*discutir e promover uma renovação do Ensino da Matemática em todo o mundo”* (Castelnuovo, 1982). Este encontro teve como objectivo unificar esforços que estavam a ser desenvolvidos em diversos países como a França, Estados Unidos, Itália ou Inglaterra entre outros.

Neste colóquio, Jean Dieudonné, matemático francês e um dos principais contribuintes para as publicações Bourbaki, deixa bem clara a sua posição antagónica ao ensino tradicional quando exclama ”Abaixo Euclides”.

“Jean Dieudonné através da sua vincada personalidade convenceu a maioria dos presentes a tornarem-se porta-vozes, nos respectivos países, da necessidade de abandonar totalmente o ensino euclidiano e substituí-lo por uma matemática mais viva e estimulante, ligada à investigação moderna.” (Castelnuovo, 1982).

Em 1960, realizou-se um seminário em Dubrovnik onde foi realçada a ideia de se desenvolver durante alguns anos um ensino semi-experimental. Desse seminário surgiu então um documento que serviria de guia para a redacção de programas e livros nos diversos países.

Em Espanha, o Movimento da Matemática Moderna abrangeu um largo período que se iniciou em 1961 e terminou em finais do século XX. Dois anos depois do colóquio de Royaumont, o Centro de Orientación Didáctica (COD) do Ministério de Educação Nacional organizou em Madrid uma reunião de catedráticos de matemática do ensino médio com o título “Nuevas Orientaciones en la Enseñanza de las Matemáticas”. Nessa reunião, o Professor Catedrático de Geometria da Universidade de Madrid Pedro Abellanas *“...informó sobre la necesidad de* *modificar el currículo de matemáticas del Bachillerato y adaptarlo a la orientación de las matemáticas modernas..."* [4] (Astudillo, 2010).

No início do ano de 1962 constituiu-se a Comissión para o Ensayo Didácyico sobre a Matemática Moderna nos Institutos Nacionales de Enseñanza Media, presidida por Pedro Abellanas e cujo trabalho piloto se desenvolverá no Instituto Cervantes (Madrid) pelo professor José Ramón Pascual Ibarra; no Instituto Mila y Fontanals (Barcelona) pelo professor Juan Casueras Regás e no Instituto Padre Suárez (Granada) pelo professor Francisco Marcos de Lanuza.

Antes da difusão da Matemática Moderna é feito um trabalho prévio de informação e formação didáctica dos professores através da realização de cursos. A sua implementação começa no Bachillerato Superior (alunos dos 15 aos 16 anos), estendendo-se seguidamente ao Bachillerato Elementar (alunos entre os 10 e 14 anos) e finalmente ao Ensino Primário.

O Ministério da Educação Nacional editou uns cadernos didácticos denominados "Apuntes" dedicados ao desenvolvimento dos temas da Matemática Moderna a partir da orientação do Programa da Matemática Moderna. Estes "Apuntes" foram escritos pelos professores Casulleras e Marcos de Lanuza e foram o resultado da experiência no quinto ano do Bachillerato.

Além dos EUA e vários países da Europa o Movimento da Matemática Moderna também teve repercursões noutros países. Este trabalho irá falar de alguns começando pelos países latino-americanos.

No Brasil, o Movimento da Matemática Moderna teve o seu início na década de 60. O professor Osvaldo Sangiorgi *"... foi um dos principais defensores e divulgadores desse movimento..."* (Oliveira, 2008) . Em 1961, na cidade de São Paulo, Osvaldo Sangiorgi, fundou o GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática que tinha como objectivo incentivar o estudo da Matemática Moderna e promover cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática do ensino secundário.

[4] Tradução própria: informou sobre a necessidade de modificar o currículo da matemática do Bachillerato e adaptá-lo à orientação da Matemática Moderna.

Na Venezuela, a implementação da Matemática Moderna na Ensino Secundário deu-se nos finais dos anos 60 durante a época do neocolonialismo marcada por uma grande dependência económica, política e intelectual dos Estados Unidos. No âmbito educativo o panorama não era diferente tendo sido adoptado o modelo americano no seu planeamento dando ênfase ao enfoque economicista, onde a educação era vista como um factor determinante no desenvolvimento económico. Segundo, Mosquera *“En nuestro país hubo muy poca resistencia a la Matemática Moderna y no surgieron alternativas a esa propuesta”*. (Mosquera, 2010)

Na Argentina, o CIEM-Comissão Internacional de Ensino da Matemática já realizava trabalhos desde 1956 em articulação com vários países europeus. Em 1962 iniciam-se cursos de aperfeiçoamento de docentes que contaram com a presença de professores do ensino secundário e eram orientados por professores catedráticos da faculdade de Ciências Exactas de Buenos Aires liderados pelo professor Dr. Luiz A. Santalo, cujo objectivo era divulgar e implementar as principais ideias do Movimento da Matemática Moderna. *“Uma das medidas adoptadas na Argentina foi a elaboração de um programa experimental para as escolas secundárias.”* (Pinto, 2008). Este novo programa substituía grande parte dos temas da geometria euclidiana e da trigonometria por geometria plana e espacial, geometria analítica e noções de álgebra moderna como conjuntos, funções e relações.

Inicialmente, o programa experimental foi aplicado em 70 escolas cujos professores tinham participado nos cursos de aperfeiçoamentos. Foram seleccionadas cinco escolas-piloto para a continuidade da experiência. Mais tarde, o programa experimental com recomendações a serem observadas pelos professores foi adoptado por todas as escolas do país.

Esta experiência teve a colaboração do governo para reformar programas, melhorar os métodos de ensino, formar e aperfeiçoar os professores e a publicar textos.

Não deixa de ser interessante ver o que se passou num país fora da Europa ou da América.

Em Marrocos, desde 1962 que a Matemática Moderna está presente nos programas marroquinos e em novos manuais que foram redigidos. A modernização dos programas em Marrocos foi realizada em duas etapas principais: uma, em 1962 cujo responsável pela elaboração destes programas foi J.P. Nuss que foi fortemente influenciado pelas ideias do Movimento da Matemática Moderna que circulavam em França e Bélgica na época, outra, em 1968 por Peureux.

O período de 1962 a 1982 durante o qual se deu a reforma da Matemática Moderna em Marrocos foi considerado turbulento. Segundo, Mohamed Akkar *"On a observé beaucoup d'échec scolaire dans la discipline qui était censée promouvoir l'esprit scientifique chez les jeunes. Sans trop d'exagération on peur dire que cette reforme mal engagée, peu maîtrisée et e pas du tout sérieusement préparé ni accompagnée, a fait des dégâts considérables et ne préparait les eleves, ni à la recherche mathématique, ni à l'utilisation des mathématiques dans les autres domaines d'activité."*[5] (Akkar, 2002).

Assim, a partir dos anos 80, Marrocos tem beneficiado da arabização do Ensino da Matemática para promover a formação de professores nacionais competentes, adoptar novos programas e redigir novos manuais.

2.3. A Matemática Moderna em Portugal

"O termo da II Grande Guerra (1945), com a derrota do fascismo italiano e do nazismo alemão, trouxe consigo a esperança de uma viragem na política nacional. Ao contrário do que se suponha, a repressão do Estado não só se manteve como se acentuou" (Carvalho, 1986).

[5] Tradução própria: Foi observado muitos casos de abandono escolar na disciplina onde era esperado promover o espírito científico dos jovens. Sem exagero, podemos dizer que esta reforma mal gerida, pouco controlada que não foi seriamente preparada nem acompanhada fez danos consideráveis ao não preparar os alunos nem para a investigação matemática nem para o uso da matemática noutras áreas.

Durante os anos 50 e 60 do século XX, a sociedade portuguesa sofre uma grande mudança. *"Sob um ponto de vista económico e social, e acompanhando o que se passa no ocidente do continente europeu, estão em curso grandes alterações"* (Rosas, 1994). A agricultura deixa de ser o sector com maior importância económica sendo substituída pela indústria e com isso aumenta a importância social de novos sectores que foram surgindo como o pequeno comércio, os técnicos superiores (engenheiros e economistas, por exemplo) e o operariado urbano, a quem era atribuída pouca importância até a essa altura.

Segundo Matos *"A condução da política económica está entregue a uma nova geração de engenheiros e economistas que, embora na sua maioria perfilhe dos ideais corporativos do regime, já não se revê no enaltecimento salazarista dos valores da pequena sociedade rural, sonhando, quer com a integração económica entre as parcelas do império — uma minoria —, quer com o aprofundamento da ligação à Europa — a maioria."* (Matos, 2006). No entanto, *"As grandes opções políticas, em especial tudo o que se relacionasse com a ordem pública interna ou com o futuro das colónias, continuam, no entanto, essencialmente nas mãos de Salazar e de um restrito grupo de fiéis."* (Matos, 2006). O regime salazarista continua assim uma ditadura tendo ao seu dispor uma polícia política para o ajudar a vigiar e reprimir todas as formas de expressão do pensamento divergentes da do regime.

Este desenvolvimento económico e social vai trazer alterações muito importantes, ao sistema educativo português, embora introduzidas de uma forma muito gradual começadas pelo ministro Leite Pinto na segunda metade dos anos 50 e continuadas por Galvão Teles. A reforma do ensino só é feita mais tarde pelo ministro Veiga Simão mas "*É durante estes anos que se vai tímida e lentamente aumentar a escolarização obrigatória para os dois sexos, se generaliza a co-educação entre rapazes e as raparigas, e se inicia a unificação entre os dois ramos do sistema de ensino"* (Matos, 2006).

Em Portugal acompanhavam-se as novas ideias educativas que pairavam na Europa do pós-guerra através da Gazeta de Matemática, revista pertencente à Sociedade Portuguesa de Matemática, onde eram publicadas pequenas notícias sobre o Movimento Matemático Internacional como por exemplo a recomposição da União Matemática Internacional e a formação da Comissão Internacional do Ensino da Matemática.

As mudanças do Ensino da Matemática em Portugal vão acontecer em simultâneo com as alterações do país e do sistema educativo. Nos anos 60 e no seguimento do resto da Europa dá-se inicio à *"...reforma da Matemática Moderna, comummente designada por Reforma Sebastião e Silva, nome do professor universitário seu mentor e produtor dos seus livros de texto mais influentes"* (Matos, 2006).

O Movimento da Matemática Moderna teve em Portugal dois períodos. O primeiro período designou-se por fase experimental tendo sido criadas turmas piloto do 3.º ciclo do ensino liceal e o segundo período corresponde à generalização da Matemática Moderna aos alunos de todos os níveis de ensino.

O primeiro período foi *"...uma experiência de modernização do Ensino da Matemática em Portugal..."* (Silva, 1978) realizada pelo ministério da Educação Nacional em colaboração com a O.C.D.E designada Projecto Especial STP-4/SP e dirigida pelo matemático Sebastião e Silva. Sebastião e Silva ao manter-se permanentemente em contacto com o movimento matemático internacional não tardou a sentir "... *a necessidade de intervir de forma mais decisiva no sentido de modificar profundamente os programas e os métodos de ensino. Neste sentido, concebeu e orientou experiências pedagógicas efectuadas a partir de 1963 nos nossos liceus*" (Ferreira, 1982).

Esta experiência iniciou-se no ano lectivo de 1963-1964, no sexto ano, em três turmas-piloto pertencendo cada turma a um dos liceus nacionais: Liceu Pedro Nunes, de Lisboa; Liceu D. Manuel II, no Porto e Liceu D. João II, em Coimbra. As turmas-piloto eram constituídas por alunos de ciências e com bom aproveitamento na disciplina de matemática. A docência nas turmas-piloto era acompanhada por um inspector orientador e os professores dessas turmas reuniam-se periodicamente com Sebastião e Silva para tirar dúvidas e fazer sugestões. O próprio Sebastião e Silva assistia às aulas dessas turmas.

Nos anos seguintes, a experiência foi-se alargando a mais turmas e a mais liceus. O número de turmas abrangidas aumentou para dezanove até 1965. Estas turmas pertenciam aos liceus de Lisboa, Porto, Coimbra, Braga e Leiria. Para ilustrar o incremento da experiência observe-se uma das manchetes do jornal "Diário Popular" do dia 23 de Julho de 1965 "*Trinta turmas dos liceus de Lisboa, Porto, Coimbra, Braga e Leiria vão conhecer no próximo ano lectivo novos processos de ensino de matemática*".

O programa experimental referente à Matemática Moderna continha novos temas como a Lógica, a Teoria dos Conjuntos, Álgebra (grupos, anéis, corpos, números complexos, álgebra de Boole, álgebra linear). Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico aproximado. Alguns temas clássicos mantinham-se como o Cálculo Diferencial, Trigonometria e Geometria Analítica. A Aritmética Racional desaparecia como tema apesar de alguns tópicos serem abordados ao longo do programa.

Nesta fase experimental, os alunos eram sempre os melhores dos respectivos liceus. Pertence ao arquivo escolar do liceu Nacional de Oeiras, actualmente Escola Secundária Sebastião e Silva, uma carta da Inspecção do Ensino Liceal e dirigida ao Reitor do liceu que retrata esta situação. A carta datada de 31 de Agosto de 1964 tinha como assunto "*Turmas de Experiência para Actualização do Ensino da Matemática" e a 2.ª Norma para a formação de turmas diz claramente que "Na constituição de tais turmas deve dar-se a preferência absoluta aos alunos mais classificados e evitar-se a inclusão de alunos repetentes ou que tenham transitado do 2.º ciclo com deficiência em Matemática*".

Os professores que leccionavam a chamada "turma piloto" também eram cuidadosamente escolhidos no entanto, "*Nunca ficou claro o critério usado na selecção dos professores, mas procurava-se convencê-los do valor pedagógico dos temas esclarecidos, da sua actualidade, e do peso que lhe dava a chancela do Professor Sebastião e Silva*." (Gil, 1982).

Madalena Garcia, professora de matemática e colaboradora de Sebastião e Silva deu uma entrevista à Gazeta de Matemática onde afirmou:

"Tive o privilégio de frequentar em Oeiras, em 1966, um curso para professores orientado pelo professor Sebastião e Silva, com o objectivo de preparar docentes para as turmas piloto da experiência de Modernização do Ensino da Matemática, por ele concebida e presidia, a decorrer em Portugal.

No ano lectivo imediato leccionei uma turma piloto e, logo a seguir, orientei vários cursos de férias para professores, visando a ampliação do número de turmas experimentais.

O acompanhamento feito pelo professor Sebastião e Silva à experiência em desenvolvimento, o estudo reflectido dos seus "Compêndios" e "Guias de Matemática" e o estímulo recebido fizeram-me ficar sua discípula.

O grupo de professores envolvidos na experiência, tendo captado necessidade de reformular o ensino de matemática desde as suas bases não só quanto a programas mas também quanto a métodos, formava uma equipa dinâmica e verdadeiramente empenhada, capaz de transmitir enorme entusiasmo aos alunos. Enunciados de exercícios, alguns até imaginados por estes, eram incluídos pelo professor Sebastião e Silva nos seus "Guias". A docência nas várias turmas experimentais no país era acompanhada no terreno por um inspector orientador e o próprio Professor Sebastião e Silva reunia periodicamente com os professores e, algumas vezes, assistia a aulas, pedindo dúvidas e sugestões para ir ajustando a experiência."

A "turma piloto" tinha mais um tempo lectivo do que as restantes turmas que seguiam o programa tradicional.

Os alunos e professores da "turma piloto" tinham um manual e um "livro guia" da autoria de Sebastião e Silva que lhes era facultado em fascículos. A edição destes textos era feita pelo Ministério da Educação com cooperação da O.C.D.E.

Sobre os resultados desta experiência pedagógica, Sebastião e Silva manifestou a sua opinião numa entrevista concedida ao jornal " Diário Popular", do dia 23 de Julho de 1965. Respondendo à pergunta sobre os resultados do ano lectivo 1964-65, Sebastião e Silva disse: "*Bastante animadores e, nalguns casos, surpreendentes, ultrapassando o que se poderia esperar. Se há três anos alguém me tivesse perguntado se era possível ensinar no liceu certos assuntos incluídos* *no novo programa, eu teria respondido imediatamente que não. Pois bem, não só é possível ensinar esses assuntos, como até acontece que os alunos, de modo geral, se interessam muito mais pelas novas matérias, passando a intervir activamente nas lições, discutindo e manifestando opiniões, com espírito crítico e originalidade*.” Naquela altura, a impressa, especialmente os jornais que cobriam a introdução da Matemática Moderna nos liceus focalizavam os seus discursos na necessidade urgente de se actualizar o Ensino da Matemática sob pena de não se acompanhar a evolução tecnológica que o mundo evidenciava com as viagens espaciais e uma vez que “*Uma nação moderna não pode subsistir sem bons técnicos, sem bons cientistas e ...sem bons professores*”[6]. Apesar do optimismo revelado por Sebastião e Silva passados vários anos ainda os resultados desta experiência ainda se prestam a comentários como nos mostra o professor J.M.Gil[7] quando afirmou “*Creio que nunca foram publicados os resultados desta experiência. Sabe-se que dela resultou a dicotomia de Matemáticas Modernas e Matemáticas Clássicas nos liceus, na segunda metade dos anos sessenta, e em professores especialistas de Matemáticas Modernas e não especialistas. Outro resultado foi a experiência de 1967, que consistiu na introdução em todos os programas dos liceus das noções da chamada Matemática Moderna: linguagem dos conjuntos, símbolos lógicos e estruturas algébricas, e publicação de livros condizentes*.” (Gil, 1982).

O segundo período da introdução da Matemática Moderna começou no início dos anos 70 com a generalização da Matemática Moderna. Devido aos problemas de saúde que assolaram Sebastião e Silva e posterior morte, este período já não contou com a sua preciosa colaboração.

Foram elaborados novos programas e novos manuais escolares que foram introduzidos em todos os níveis de ensino. Foram dadas de uma forma muito superficial novas indicações metodológicas. Também foram dadas, nesta altura, várias acções de formação mas com o objectivo de apenas actualizar cientificamente os professores. Os programas desta época mantiveram-se até 1991, mas *“... o treino do cálculo com expressões algébricas e a prática de*

---

[6] Manchete do jornal “Diário Popular” do dia 30 de Julho de 1966 feita com fala de Sebastião e Silva
[7] Professor do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

exercícios artificiosos com limites e derivadas, nunca chegaram a perder por completo o seu lugar. Em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, verificou-se uma integração das duas." (Ponte, 2003).

"Nesta generalização salientou-se o que era abstracto e formal, sem perder de vista o cálculo. As aplicações da Matemática desapareceram por completo. Tudo o que remetia para o desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas foi relegado para segundo plano." (Ponte, 2002).

2.4. O fim da Matemática Moderna

Enquanto em Portugal se generalizava a filosofia da Matemática Moderna a todo o ensino, na década de 70 nos Estados Unidos da América e logo de seguida na França já apareciam críticas ferozes ao Movimento da Matemática Moderna. Segundo Ponte *"no nosso país, a generalização do currículo de matemática moderna só ocorreu quando noutros países este movimento já à muito estava em refluxo."* (Ponte, et al, 1997). O representante mais conhecido deste movimento de revolta contra a Matemática Moderna era o prestigiado matemático Morris Kline que escreveu o livro "Why Johnny can´t add: The failure of the new math". *"Este movimento ficou conhecido por back to basics e pretendia o regresso aos currículos e métodos anteriores à reforma, altura onde os alunos conheciam a tabuada e sabiam operar com muitos dígitos."* (Matos, 1989) Para Kline, *"A teoria dos Conjuntos é para a Matemática Elementar um formalismo oco que dificulta as ideias que são mais facilmente compreendidas intuitivamente"* (Kline, 1976). Para este autor, o formalismo e o simbolismo excessivos na linguagem aliados ao exagero da forma dedutiva de abordar os assuntos na Matemática Moderna empobreciam a vida e o espírito da matemática.

Segundo Matos *"Perante tantas críticas começou-se a questionar a validade da reforma, sendo referido o segundo Congresso da ICMI[8], em 1972 como o marco do fim da matemática moderna."* (Matos, 1989). Este congresso da ICMI realizou-se em Exeter, no Reino Unido.

[8] ICMI- Comissão Internacional para a Instrução da Matemática

Segundo João Pedro da Ponte *"O movimento da Matemática Moderna deixou algo de positivo – uma renovação dos temas, uma abordagem mais actual dos conceitos, uma preocupação coma a interligação das ideias matemáticas - mas, o seu grande objectivo de proporcionar uma melhoria das aprendizagens à entrada da universidade não foi atingido"* (Ponte, 2003).

Em Portugal, devido à mudança para um regime democrático as condições do ensino no final dos anos 70 e durante os anos 80 são caracterizadas por escolas sobrelotadas, funcionando muitas delas em instalações provisórias, pela falta de professores e uma grande parte sem certificação profissional "*Em 1978-79 ensinavam Matemática 759 professores, 359 dos quais não tinham a formação matemática nem pedagógica exigida para a sua profissionalização*" (Gil, 1982) e pela colocação de muitos professores após o inicio do ano lectivo. A nível do Ensino da Matemática existe uma elevada taxa de reprovações, os professores não conseguem cumprir os programas e é manifesto o desinteresse geral dos alunos. Com este contexto educativo, a partir do início dos anos 80, os surgem as criticas dos professores de Matemática às condições de ensino nas escolas e aos programas de Matemática Moderna que acusam como sendo os primeiros responsáveis pela situação. A Sociedade Portuguesa de Matemática - SPM - entre Abril e Julho de 1981 promove um conjunto de seis debates sobre os programas de Matemática do ensino secundário. Esses debates contaram com a presença de membros importantes da SPM, dos autores dos programas e muitos professores de variados graus de ensino, desde o básico ao universitário. Os programas do ensino secundário são criticados por terem sido elaborados com base nos antigos programas liceais e portanto tendo como objectivo a formação pré-universitária e porque devido às alterações sofridas ao longo dos tempos tornaram a disciplina a seu ver mais formal e com uma linguagem mais complicada, desligada da realidade e das aplicações. Também é criticada a forma como foram elaborados os programas ou seja por comissões designadas pelo Ministério da Educação não havendo uma participação institucional com organizações ligadas à matemática. Finalmente, propõe-se ao Ministério da Educação uma comissão para a qual foram indicados elementos de diversas instituições do ensino superior, do ensino secundário e da SPM com o objectivo de elaborar novos programas. O papel do Ministério da Educação é minimizado na elaboração destes programas podendo este, no entanto indicar alguns elementos da comissão. No final destes debates é elaborado e aprovado um documento denominado *“Os programas em debate”* que reflecte as três vertentes da alternativa pedagógica à Matemática Moderna: resolução de problemas, aplicações da matemática e uso da tecnologia.

3. O COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA DE SEBASTIÃO E SILVA

3.1. Introdução

Na sociedade actual, o livro escolar é visto como um objecto muito familiar aparentando por isso ser um objecto sem grande complexidade. Existe a ideia generalizada que o manual escolar é feito para fornecer informação relativa aos conteúdos e materiais previstos nos programas oficiais. Esta informação é transmitida na forma julgada mais adequada pelos seus autores. Esta ideia torna o manual como "*uma das principais fontes de informação dos alunos na sala de aula, definindo o que tem valor e legitimando a cultura da sala de aula*" (Lourenço, 1997).

Tem, no entanto de ser realçado que o manual escolar não é o programa explícito mas apenas uma interpretação deste, sendo por isso que apresenta facetas diferentes consoante a relação que mantém com a sociedade. Ou seja, o manual transmite as indicações do programa quanto aos conhecimentos e às técnicas que a sociedade considera necessárias.

O livro escolar é assim "...*um instrumento pedagógico com uma longa tradição e é inseparável, tanto na sua elaboração como no uso que dele se faz, das estruturas, dos métodos e das condições de ensino do seu tempo*" (Choppin, 1980).

A análise do manual escolar tem, assim, tido uma importância destacada no contexto da pesquisa histórica na Didáctica da Matemática uma vez que este reflecte a actividade numa sala de aula. Segundo Choppin, o manual escolar "*impõe uma distribuição e hierarquia dos conhecimentos e ajuda a moldar o andaime intelectual de alunos e professores, é um instrumento de poder, uma vez que contribui para a uniformidade linguística da disciplina, o nivelamento cultural e a disseminação das ideias dominantes*." (Choppin, 1980).

Noutros tempos, o manual escolar formava com o professor o conjunto quase completo de recursos disponíveis para a aprendizagem. Neste contexto torna-se interessante estudar a contribuição dos manuais escolares na história da educação matemática, explorar a gama e a riqueza do seu conteúdo, o impacto na sala de aula e o seu papel como transmissor.

"*Pode-se dizer que o manual escolar está associado à evolução da pedagogia posicionando-se centralmente na discussão sobre educação, o que releva a sua importância enquanto suporte privilegiado dos conteúdos educativos, como instrumento pedagógico e na veiculação de sistemas de valores ideológicos e culturais*" (Choppin, 1980). Essa importância é maior quando o poder político dita regras sobre o que se pode ou não ser impresso e sobre a extensão que a sua divulgação pode ter. Durante o regime ditatorial do Estado Novo, pretendeu-se transformar os manuais escolares em instrumentos de transmissão da sua política nacionalista. Para isso foi utilizada legislação apropriada para impor o livro único. Em 1947, foi publicado o Estatuto do Ensino Liceal no DL 36508 de 17/9/47 do DG I série que seria o modelo regulamentador e regulador de todos os aspectos da vida escolar nos liceus da época. O Estatuto do Ensino Oficial preconiza no seu artigo 388.º que "*só podem ser adoptados no ensino, tanto oficial como particular os livros aprovados pelo Ministério da Educação Nacional*" e no artigo 414.º que não é "*lícito aos professores quando haja livros aprovados para uma disciplina, orientar o ensino para outros livros ou apontamentos*". Inicia-se então o período de vigência do "livro único" aceite pelas autoridades.

"O período de aprovação de um livro era de cinco anos, durante os quais os autores poderiam propor, em novas edições, alterações que considerassem importantes. Em cada exemplar posto à venda figuraria na contracapa, a menção"APROVADO OFICIALMENTE COMO LIVRO ÚNICO", com a indicação do Diário do Governo em que fora instituído. Além disso, eram numerados e chancelados pelo Ministério da Educação Nacional." (Almeida, 2008).

Sebastião e Silva publicou em 1958 o Compêndio de Álgebra em colaboração com José Duarte da Silva Paulo e também no mesmo ano o Geometria Analítica Plana. Estes dois livros foram livros únicos respectivamente para o 3.º ciclo e 7.º ano.

3.2. Breve biografia de Sebastião e Silva

Fig. 1 – José Sebastião e Silva

José Sebastião e Silva nasceu em Mértola em 12 de Dezembro de 1914. Em 1937, obteve a licenciatura em Ciências Matemáticas pela faculdade de Ciências de Lisboa e em 1949 obteve doutoramento em Matemática pela mesma faculdade. A partir de 1951 e durante 11 anos Sebastião e Silva foi Professor Catedrático do Instituto Superior de Agronomia após os quais ingressou na faculdade de Ciências de Lisboa. Dirigiu o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa durante mais de 20 anos, transformando-o numa *"...verdadeira escola de investigação matemática onde se formaram muitos investigadores e professores universitários."* (Ferreira, 1982). A Análise Funcional foi a área científica onde Sebastião e Silva se especializou.

No Ensino da Matemática, Sebastião e Silva teve uma participação muito relevante. Em Dezembro de 1954, Sebastião e Silva foi nomeado membro da Comissão portuguesa da União Matemática Internacional sendo nomeado secretário da mesma em Janeiro de 1955. Neste ano, foi também nomeado para a Sub-Comissão Portuguesa da Comissão Internacional do Ensino Matemático constituída além dele por outro professor universitário, José Vicente Gonçalves e dois professores dos liceus, José Jorge Gonçalves Calado e José Duarte da Silva Paulo. Em 1963, Sebastião e Silva presidiu uma Comissão de estudos para a modernização do Ensino da Matemática, constituída além deste por Jaime Furtado Leote, Manuel Augusto da Silva e António Augusto Lopes, Professores metodólogos dos Liceus Pedro Nunes, em Lisboa, D. João III, em Coimbra e D. Manuel II, no Porto, respectivamente.

Faleceu na freguesia de S. Domingos de Benfica, Lisboa, em 25 de Maio de 1972.

3.3. Sebastião e Silva e o Ensino da Matemática

Sebastião e Silva tinha uma visão globalizante acerca do Ensino da Matemática que começava no ensino primário e terminava no ensino superior. Para este notável matemático, a matemática não era apenas um conjunto de técnicas que o aluno tinha de dominar mas um meio de se formar integralmente como cidadão. Segundo A. Franco de Oliveira *”uma directriz essencial do projecto de modernização veiculado por José Sebastião e Silva: dar ao estudante uma visão do porquê, a par do como se faz.”* (Oliveira, 1982).

Para Sebastião e Silva *“Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de meios, não de fins.”* (Silva, 1977b). Referia também que *“Os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação. Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva – todos estes meios se alternam constantemente na investigação científica, numa cadeia sem fim em que é difícil destrinçar uns dos outros.”* (Silva, 1977b). Sebastião e Silva criticava os métodos tradicionais dizendo que *“É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino. É preciso evitar exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples. (...) É mais importante reflectir sobre o mesmo exercício que tenha interesse, do que resolver vários exercícios diferentes, que não tenham interesse nenhum. (...) Entre os exercícios que podem ter mais interesse figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas.”* (Silva, 1977b). Dava extrema importância aos métodos de ensino como refere no Guia para a utilização do Compêndio de Matemática: “*A modernização do Ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.”* (Silva, 1977a) e também *“Ensinar*

Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos de início, não estejam solidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam" (Silva, 1977a). Sebastião referia claramente o que considerava verdadeiramente importante: *"Se não houver tempo – o que é bem provável – podem omitir-se as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar,..."* (Silva, 1977b). Não se pense, no entanto que as demonstrações não lhe merecem importância. Para ele *"...o ensino de qualquer assunto deve (...) começar pela fase intuitiva. Mas a fase racional, que se lhe segue, é igualmente indispensável. Especialmente em Matemática, nenhum resultado pode merecer inteira confiança, enquanto não for sancionado pela razão, isto é, demonstrado logicamente. Por isso, se é muito importante estimular no aluno a intuição e a imaginação criadora, não menos importante é desenvolver nele o espírito crítico, o hábito da análise lógica e do raciocínio rigoroso."* (Silva, 1977b)

A ligação da matemática com outras áreas científicas era um aspecto do Ensino da Matemática de particular importância para Sebastião e Silva. Para ele *"... o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e vice versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos."* (Silva, 1977b)

O uso de computadores no Ensino da Matemática era uma ideia inovadora que Sebastião e Silva partilhava pois em relação à análise numérica *"...coloca o aluno imediatamente em contacto com a ideia dos métodos de aproximação, que domina toda a análise numérica moderna, ligada ao uso de computadores."* (Silva, 1977b)

Relativamente ao formalismo no Ensino da Matemática, Sebastião e Silva era peremptório: *"A lógica matemática é um meio poderoso para habituar o aluno à clareza e ao rigor, mas sem esquecer que, na investigação matemática, a intuição precede normalmente a lógica, e que a ordem lógica dos assuntos"* (Silva, 1977a).

3.4. O Compêndio de Matemática

Fig. 2 - Capa

O Compêndio de Matemática redigido por Sebastião e Silva foi o manual utilizado para introduzir a Matemática Moderna em Portugal e era dirigido ao 6.º e 7.º anos do ensino liceal. O manual vinha acompanhado pelo Guia do Professor redigido pelo mesmo autor.

A primeira edição do Compêndio de Matemática foi em 1965 e publicada pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura durante o Estado Novo. O manual era constituído por três volumes, sendo o primeiro constituído por dois tomos dirigido ao 6.º ano e os outros dois dirigidos ao 7.º ano. O Guia do Professor era constituído por dois volumes, sendo o primeiro relativo ao 1.º volume do manual e o segundo aos dois outros volumes. Na nota de apresentação do Compêndio de Matemática, redigida pelo Gabinete de Estudos e Planeamento, é referido que *"...este Compêndio de Matemática é uma obra de valor científico e pedagógico muito invulgar, certamente destinada a desempenhar por longo tempo um papel fundamental na formação, não apenas de muitos professores e estudantes das nossas escolas secundárias e até superiores, mas também das pessoas que aspiram a atingir, como autodidactas, uma compreensão clara das grandes ideias que estão na base das Ciências Exactas dos nossos dias, mesmo que não pretendam prosseguir estudos superiores relacionados com as Ciências"* (Silva, 1975a). Sebastião e Silva na advertência prévia do Guia do Professor, refere relativamente ao compêndio de Matemática que este *"...é destinado a servir, não só como auxiliar de estudo para o aluno, mas ainda como complemento de formação do professor."* (Silva, 1977a)

Relativamente ao Guia do Professor, a mesma nota de apresentação citada anteriormente refere também que *"Aparentemente dedicados em primeiro lugar aos professores, estes «guias» foram redigidos por forma a serem de igual valor para os estudantes..."* (Silva, 1975a).

O manual tem de dimensões 16 cmx23cm. O texto do manual é todo a cor preta sendo utilizado apenas o azul numa lista na capa. Cada volume está organizado por capítulos identificados por numeração romana com o tema escrito a letra maiúsculas, a negrito e de tamanho maior que o restante texto. Cada capítulo está dividido por pontos em numeração árabe, seguidos do tema escrito a negrito.

O primeiro tomo do primeiro volume é constituído por 221 páginas e começa com uma nota de apresentação do Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura, onde se enquadra o presente manual nos compêndios destinados ao ensino secundário que *"...foram escritos por grandes cientistas, que não hesitavam em afastar-se temporariamente dos domínios da investigação em que se celebrizavam para puderem contribuir, de forma mais directa e imediata, para o progresso cultural da sociedade em que viviam. Para além da excepcional cultura humanística e dos dotes pedagógicos e até literários, que muitas dessas obras revelam, todas se distinguem por uma elevação de perspectiva só possível a autores que sejam, eles próprios, criadores de Ciência."* (Silva, 1975a).

Este tomo introduz dois domínios matemáticos fundamentais: Lógica e a Teoria de Conjuntos.

Os temas abordados nos capítulos que constituem o primeiro tomo do primeiro volume são:

Capítulo I. Introdução à lógica matemática

Capítulo II. A lógica em termos de conjuntos

Capítulo III. Números inteiros e cálculo combinatório

Capítulo IV. Funções de uma variável

O segundo tomo do primeiro volume é constituído por 303 páginas e os capítulos estão por ordem sequencial do primeiro tomo. Os primeiros dois capítulos deste tomo são dedicados à Álgebra abordando conceitos de grupo, anel, corpo, Álgebra de Boole e Álgebra linear. O último capítulo é dedicado à

Estatística e às Probabilidades. Os temas abordados nos capítulos que constituíem este tomo são os seguintes:

Capítulo V. Operações binárias. Grupóides

Capítulo VI. Anéis e corpos. Números complexos. Álgebras de Boole.

Capítulo VII. Introdução à Estatística e ao Cálculo das Probabilidades

O segundo volume é constituído por 430 páginas e inicia com uma nota prévia do autor seguida de uma advertência do mesmo. A nota prévia alerta para o facto deste volume conter *"...ainda mais que o 1.º e o 3.º, matérias que não são obrigatórias nos cursos-piloto e que aparecem devidamente assinaladas por asterisco ou notas ao fundo da página."* (Silva, 1978) fazendo quatro considerações para fundamentar a inclusão dessas matérias. Na advertência o autor reflecte acerca da ordem de apresentação das matérias no manual considerando que *"...a ordem lógica na apresentação dos assuntos não é muitas vezes, a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Devemos, pelo contrário, procurar seguir um caminho em ziguezague, de tentativa e erro, por aproximações sucessivas, semelhante ao da investigação. Numa palavra, convém seguir, tanto quanto possível, o método heurístico."* (Silva 1977). Termina agradecendo a colaboração da Divisão de Mecânica Aplicada do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

Os temas tratados neste volume são:

Capítulo I. Introdução ao Cálculo Diferencial

Capítulo II. Cálculo Intregral

Capítulo III. Teoria Dedutiva dos Números Naturais

O terceiro volume é constituído por 225 páginas e os temas nele tratados são:

Capítulo I. Introdução ao Cálculo Vectorial

Capítulo II. Números Complexos em forma trigonométrica

Capítulo III. Transformações Afins e Aplicações Lineares

Capítulo IV. Representação Analítica de Aplicações Lineares e Transformações Afins

Capítulo V. Álgebras de Aplicações Lineares e Álgebra de Matrizes.

Estes manuais abordavam novos temas como a Iniciação à Lógica, Estruturas Algébricas (grupos, anéis, corpos, Álgebra de Boole), Álgebra Linear, em articulação com os temas tradicionais.

Eram livros *"...escritos com grande elegância e erudição e revelavam uma posição equilibrada no que respeita a conteúdos, proporcionando o tratamento de novos temas sem derrapar para os extremismos formalistas..."* (Ponte, 2002).

3.5. O Compêndio de Matemática no Ano Propedêutico

Em 1977 e pelo Decreto-Lei n.º 491/77 de 23 de Novembro do mesmo ano é criado em Portugal o Ano Propedêutico que viria substituir o Serviço Cívico. Este ano foi criado uma vez que, tal como refere o próprio Decreto-Lei "*Reconhecendo que se tornaria difícil a criação, desde já, desse 12.º ano de escolaridade, nem por isso se deixa de reconhecer a urgência de se avançar, pelo menos, com a institucionalização de cursos propedêuticos do ensino superior, tanto do de longa, como de curta duração*". A existência deste Ano Propedêutico durou de 3 anos, sendo substituído em 1980 pelo 12.º ano (Decreto-Lei n.º 240/80, de 19 de Julho). As razões para a existência deste Ano Propedêutico estão referidas na introdução ao decreto-lei que o criou: preparar os técnicos portugueses com um maior nível de desenvolvimento de forma a puderem acompanhar a evolução da ciência e da técnica. É também referido no mesmo decreto que Portugal era, na altura, dos poucos países da Europa com uma escolaridade pré-universitária de apenas 11 anos.

O plano de estudos do Ano Propedêutico era constituído por 5 disciplinas, sendo umas introdutórias às matérias dos planos de estudo dos diversos cursos do ensino superior, e outras importantes para a formação dos futuros candidatos a esse ensino.

O Ano Propedêutico funcionava através de educação à distância a partir de emissões de televisão, mas de forma diferente das da Telescola. Assim, para o

Ano Propedêutico as emissões televisivas eram em diferido ao contrário das da Telescola que eram em directo.

Por outro lado, no Ano Propedêutico os estudantes assistiam individualmente em casa às emissões de televisão, enquanto a Telescola estava organizada por turmas e salas de aula.

O material de apoio aos estudantes no início do Ano Propedêutico era constituído por fascículos da matéria referentes às aulas televisivas e fichas de trabalho para consolidar a matéria. Este material era adquirido pelos estudantes em centros de apoio localizados em diversas cidades. Mais tarde, os estudantes já tinham manuais para acompanhamento do seu estudo.

Na disciplina de matemática foi adoptado como manual o Compêndio de Matemática, de Sebastião e Silva, com excepção do 1.º volume, 1.º tomo. É interessante verificar que passados cerca de catorze anos da primeira edição do Compêndio de Matemática, este volte a ser editado sem qualquer alteração excepto na capa que, onde se lia Curso Complementar do Ensino Secundário está agora escrito Ano Propedêutico. Esta excepção torna-se relevante em relação à faixa etária que se pretende atingir. Repare-se que este manual é agora dirigido a alunos um ano mais velhos devido ao aumento da escolaridade.

4. O CÁLCULO DIFERENCIAL NO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

4.1. Origem e ensino do Cálculo Diferencial

Torres & Giraffa num artigo sobre o Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica diz *“A palavra “calcular” é um diminutivo de “calx”, que, em latim significa”pedra”. No passado significou “fazer contas por meio de seixos””*. (Torres & Giraffa, 2009).

O Cálculo Infinitesimal ou simplesmente Cálculo é uma poderosa ferramenta matemática, resultado de inúmeras contribuições importantes e novas perspectivas de muitos matemáticos ao longo de muitos séculos da nossa história. O Cálculo Infinitesimal é formado por dois ramos: o Cálculo Diferencial relacionado com o estudo das derivadas e o Cálculo Integral relacionado com estudo dos integrais. Os principais conceitos do Cálculo Infinitesimal, derivada, continuidade, integral, convergência e/ou divergência estão definidos utilizando a noção de limite. Limite é, então uma noção fundamental do Cálculo Infinitesimal em geral e do Cálculo Diferencial em particular. Sebastião e Silva teve a oportunidade de comentar isso mesmo quando disse *“A análise infinitesimal assenta essencialmente sobre os conceitos de função e de limite.”* (Silva, 1951). Seria então natural que no desenvolvimento ordenado e lógico do Cálculo Diferencial fosse a noção de limite a surgir em primeiro lugar. No entanto, historicamente isso não aconteceu. Durante muitos séculos, as noções de limite que surgiam eram confusas, indefinidas e vagas. Só no final do Século XVIII e princípio do século XIX a definição de limite foi usada rigorosa e correctamente.

A origem e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão relacionados com o problema de determinar tangentes a curvas num ponto. Na Grécia antiga a noção de recta tangente como sendo uma recta que intercepta uma curva num único ponto já era conhecida. Arquimedes de Siracusa (287-212 aC) e Apolônio de Perga (262 – 190 aC) utilizavam métodos geométricos diferentes para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. Arquimedes também se dedicou ao estudo de áreas e volumes recorrendo ao Método da Exaustão cuja descoberta, na verdade é atribuída a Eudoxo de Cnido (390-338 a.C). Na verdade, este método trata-se da ideia básica do conceito de limite: uma sucessão de valores numéricos, que pode se aproximar de um determinado valor, tanto quanto quisermos, porém sem nunca o atingir. Os geómetras gregos tinham dificuldade em lidar com o conceito de lmite.

Por volta do ano 1550, são divulgados na Europa, em várias edições impressas, os escritos matemáticos de Arquimedes. Os matemáticos da altura limitaram-se a utilizar os métodos arquimedianos para determinar áreas, volumes e centros de gravidade. No renascimento e ao contrário dos matemáticos anteriores, Galileu Galilei (1564-1642) procurou ir mais além dos gregos não se limitando a estudar as grandezas de natureza geométrica da Astronomia, Óptica e Estática. Ele foi o primeiro a estudar quantitativamente áreas nunca abordadas pelos gregos clássicos como cinemática, dinâmica, elasticidade entre outras. Galileu estuda o movimento geometricamente e chega a relações entre distância, velocidade e aceleração que actualmente são aplicações da derivada.

Devido ao trabalho de Galileu, verificou-se que os métodos infinitesimais eram os mais adequados para o estudo dessas novas disciplinas. Nos 50 anos seguintes esses métodos foram aperfeiçoados e aplicados nas áreas anteriores por discípulos de Galileu e outros matemáticos italianos, franceses e ingleses.

Após os gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século XVII devido ao desenvolvimento da geometria analítica. Pierre de Fermat (1601-1665) ao interessar-se pelo estudo da quadratura de curvas cuja equação geral é $y = x^n$, onde n é um inteiro positivo, elaborou um método algébrico para determinar os pontos máximos e mínimos de uma função. Esse método consistia em encontrar geometricamente os pontos onde a recta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, isto é os pontos em que o coeficiente angular da recta tangente era nulo. Repare-se que esse método é ainda utilizado actualmente.

Passados 100 anos da divulgação dos escritos de Arquimedes surgiu Isaac Newton (1642-1727) tendo já encontrado uma grande base de trabalho matemático e físico para escrever “Philosophiae Naturalis Principia Mathemática”, publicado em 1687, livro que elogia o poder do Cálculo Infinitesimal.

Segundo Batista, "*Newton adopta uma visão cinemática das grandezas geométricas, ou seja, ele concebe-as como se fossem produzidas por um movimento contínuo. Assim uma curva é considerada como a trajectória de um ponto em movimento. As grandezas são geradas são chamadas fluentes. As suas velocidades instantâneas ou taxas de crescimento, são chamadas de fluxões. As fluentes são designadas pelas letras,* x, y, z *as fluxões por* $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ *e as correspondentes fluentes por x, y, z.(...) O ponto de partida de Newton foi considerar duas variáveis que se relacionam através de uma equação como* $y=x^2$*. Hoje chamaríamos esse "relacionamento" de função e para indicar que* y *é uma função de* x *escrevemos* $y = f(x)$*."* (Batista, 2010).

Foi Newton quem descobriu a maioria das regras, utilizadas actualmente no estudo do cálculo. Seus antecessores abriram o caminho, mas foi Newton quem transformou essas ideias numa ferramenta poderosa, universal, que logo seria aplicada com enorme sucesso a todos os ramos da ciência.

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral foi descoberto por Barrow (1630-1677) mas foi Newton o primeiro a usá-lo de forma sistemática, mostrando a sua utilidade na descoberta de resultados em Matemática e Física.

De uma forma simples, pode-se dizer que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em 1684, iniciou o Cálculo Diferencial. No entanto, ao contrário do actual Cálculo Diferencial que é baseado na noção de derivada, era baseado na noção de diferencial.

A notação utilizada por Leibniz apresenta várias vantagens sobre o método das fluxões de Newton. Leibniz concebeu o seu Cálculo Diferencial e integral por volta de 1675 e, em 1677, já tinha um sistema plenamente desenvolvido e funcional. Desde o começo, a sua abordagem era diferente da de Newton, que se baseava na Física. Já Leibniz estava mais próximo da filosofia do que da Física e a sua concepção de Cálculo era mais abstracta. Ele pensava em termos de *diferenciais,* pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y. Esses aumentos foram chamados por ele de dx e dy respectivamente.

A notação da letra pontuada adoptada por Newton, sobreviveu na Inglaterra por mais de um século e ainda pode ser encontrada em livros de Física para denotar a diferenciação em relação ao tempo. Na Europa Continental, no entanto, adoptou a notação diferencial de Leibniz, $\frac{dy}{dx}$. Essa notação para a derivada apresenta muitas vantagens. É altamente sugestiva e de muitos modos se comporta como fracção ordinária. A regra da cadeia mostra a grande unidade da notação de Leibniz: podemos manipular o símbolo $\frac{dy}{dx}$ como se ele fosse realmente uma proporção de duas quantidades. A notação da letra pontuada de Newton não apresenta o mesmo poder sugestivo.

No início, o conhecimento do Cálculo ficou limitado a um pequeno grupo de matemáticos. O circulo de Newton na Inglaterra e Leibniz e os irmãos Bernoulli no continente. Os Bernoulli propagaram-se por toda a Europa, ensinando-o a vários matemáticos. Curiosamente, na Inglaterra, onde se tinha originado, o Cálculo não se saiu tão bem. A figura grandiosa de Newton desencorajava os matemáticos britânicos a estudar o assunto com vigor. E o que era pior, ao se colocarem inteiramente ao lado de Newton na disputa de prioridade, eles desligaram-se dos desenvolvimentos feitos no continente. Teimosamente, mantinham a notação de pontos de Newton, negando-se a ver as vantagens da notação diferencial de Leibniz.

O nome "derivada" foi criado por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) que também introduziu o símbolo $f'(x)$ para a derivada de $f(x)$.

O primeiro livro-texto de Cálculo Infinitesimal foi publicado pelo matemático francês Guillaume François Antoine L' Hopital (1661-1704) e denominava-se "Analyse dês infiniment petits".

Durante o Século XVIII o Cálculo Infinitesimal desenvolveu-se principalmente devido ao trabalho de Euler (1707-1783), tendo escrito um livro sobre Cálculo Infinitesimal que ainda é muito interessante lê-lo actualmente. No entanto, esse desenvolvimento do Cálculo Integral usava argumentos mais baseados na intuição do que na razão lógica e resultados erróneos apareciam não raras vezes.

Em 1786, com vista a conferir um padrão de trabalho mais rigoroso, uma comissão da Academia de Berlim, presidida por Lagrange lançou um concurso à comunidade matemática: ganharia um valioso prémio quem fosse capaz de criar um formalismo rigoroso para o Cálculo. Ganhou um matemático francês chamado L´Huilier (1750-1840). O formalismo que L´Huilier desenvolveu introduzia formalmente a noção e notação de limite.

O formalismo de L´Huilier foi desenvolvido e bastante divulgado por Cauchy (1789-1857) nos cursos que dava na Escola Politécnica de Paris, sendo por isso que quase toda as pessoas pensem que é dele.

A noção de integral de Riemann e os resultados básicos sobre sequências que fazem parte do Cálculo Moderno foram resultado de estudos dos matemáticos alemães Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) e Bolzano (1781-1848) entre outros, no final do século passado. Em reacção a esses estudos que pretendiam retirar os infinitésimos de todas as áreas do cálculo, Paul Du Bois Raymond (1831-1889) desenvolveu no final do século passado, um formalismo rigoroso para os infinitésimos.

4.2. O Cálculo Diferencial nos programas de matemática do ensino secundário

Neste capítulo pretende-se mostrar, adoptando uma perspectiva histórica quando surgiu o Cálculo Diferencial no Ensino da Matemática em Portugal e o percurso efectuado ao longo dos diversos programas de Matemática no ensino secundário e qual a importância que estes lhe atribuíam. Este estudo tem o seu princípio no início do século XX e vai até à actualidade.

Após análise a vários documentos verificou-se que se pode dividir o Ensino da Matemática em Portugal em cinco grandes períodos de tempo: 1.º período: O ensino tradicional (até aos anos 50), 2.º período: A matemática moderna (anos 60), 3.º período: A emergência de uma nova perspectiva (anos 80), 4.º período: O ajustamento de programas do ensino secundário (1997) e 5.º período: a actualidade.

1.º período: O ensino tradicional (até aos anos 50)

A estrutura do ensino desde o início do século XX até aos anos 50 com excepção de algumas pequenas alterações que irão ser referidas *"...encontrava-se dividido em dois ciclos: curso geral e o curso complementar que consagrava duas vias: Letras e ciências. O curso geral era composto por dois ciclos, com a duração de cinco anos, enquanto o curso complementar, com um ciclo apenas, tinha a duração de dois anos."* (Vázquez & Aires, 2005).

A primeira reforma do ensino liceal do século XX foi a reforma de Eduardo José Coelho[9], publicada em 30 de Agosto de 1905. Com esta reforma termina o regime do livro único sendo apenas exigido que os manuais adoptados nos liceus fossem aprovados por uma comissão nomeada pelo governo para esse efeito. Esta situação manter-se-á até 1950 sendo neste ano reposto o regime de livro único que se manterá até 1974. É no programa da VII classe do curso complementar de ciências no capítulo de Álgebra que aparece pela primeira vez o Cálculo Diferencial nos programas do ensino liceal ao ser dado o conceito de derivada. O programa relativo a esta reforma foi publicado no DG n.º 250 de 4 de Novembro de 1905.

No Decreto n.º 5:002 do DG n.º 257 de 28 de Novembro de 1918 foram publicados os programas relativos à reforma de Alfredo Magalhães[10], segunda reforma do ensino liceal. O programa de Matemática da VI classe, o Cálculo Diferencial tem pela primeira vez na sua história um capítulo próprio com a designação de "Elementos de Cálculo Infinitesimal". Recorde-se que na reforma anterior o Cálculo Diferencial já tinha sido abordado mas dentro do capítulo da Álgebra. Neste capítulo antes do estudo da noção de derivada é abordado o conceito de limite e finaliza com uma noção simples de integral. Neste programa também são estudadas as derivadas das funções circulares no capítulo da Trigonometria Plana. Os programas relativos à reforma Joaquim José de Oliveira[11], terceira reforma do século foram publicados no Decreto n.º 6:132 do

[9] Eduardo José Coelho (1835-1913) foi Ministro e Secretário de Estado dos Negócios do Reino.
[10] Alfredo Magalhães (1870-1957) foi Ministro da Intrução Pública de 1917 a 1919 e de 1926 a 1928.
[11] Joaquim José de Oliveira foi Ministro da Intrução Pública de 1919 a 1920

D.G. n.º 196 de 26 de Setembro de 1919. A novidade desta reforma foi a introdução da disciplina de Matemática na VI classe do curso complementar de letras. O Cálculo Diferencial continua no capítulo de Elementos de Cálculo Infinitesimal mas agora no programa da VII classe do curso complementar de ciências e ainda no programa da VI classe do curso complementar de letras. Na reforma seguinte atribuída a Ginestal Machado[12] e legislada em 18 de Junho de 1921 permaneceram os programas da reforma anterior.

A quinta reforma deve-se a Ricardo Jorge[13]. Com esta reforma a estrutura de ensino vai sofrer alterações importantes. A escolaridade liceal passa de sete para seis anos. O curso geral, designado agora por curso dos liceus mantém os cinco anos mas os cursos complementares de letras e ciências cuja denominação também foi alterada para cursos de preparação para a instrução superior passam a ter só um ano. Os programas relativos a esta reforma foram publicados no Decreto n.º 12:594 do DG n.º 245 de 2 de Novembro de 1926 tendo sofrido alterações posteriormente. Nesta reforma o Cálculo Diferencial sofre um retrocesso pois deixa de existir como capítulo próprio consistindo apenas no estudo da noção de derivada integrado no capítulo da Álgebra mas agora no programa da IV classe do curso geral. É de realçar que a noção de função e continuidade só irão ser leccionadas dois anos depois na VI classe do curso complementar também num capítulo de Álgebra. Na reforma Alfredo de Magalhães, sexta reforma do ensino, o ensino liceal passou a ter novamente a duração de sete anos uma vez que os cursos complementares voltaram a ter novamente dois anos. *"Os conteúdos programáticos do curso complementar não foram revistos, mas no entanto, através de um decreto emanado do Ministério da Instrução Pública, determinava-se que, para esse ano lectivo, os conselhos escolares dividissem pela VI e VII classes as matérias dos programas dos cursos complementares de letras e ciências, devendo na divisão ser mantida a mesma ordem pela qual eram estudados os assuntos...*" (Vázquez & Aires, 2005). É na reforma seguinte de Cordeiro Ramos[14] que foram publicados novos programas no Decreto n.º 18:885 de 27 de Setembro de 1930. Nesta reforma, o Cálculo

[12] Ginestal Machado (1874-1940) foi ministro da Instrução Pública de Maio a Agosto de 1921
[13] Ricardo Jorge (1886-1975) foi Ministro da Instrução Pública de Junho a Novembro de 1926.

Diferencial volta a fazer parte do programa da VI classe do curso complementar de ciências mas ainda inserido no capítulo da Álgebra. No entanto, nota-se que houve um cuidado especial na elaboração deste capítulo pois o conceito de derivada é antecedido do estudo de funções, teoria dos limites de funções de uma só variável e continuidade de funções. É também introduzida neste capítulo a noção de diferencial de uma função.

Desde esta reforma até 1936 houveram três reformulações dos conteúdos programáticas que fora o facto de terem retirado a noção de diferencial logo na primeira reformulação não trouxeram novidades aos programas existentes.

Em 14 de Outubro de 1936, pelo Decreto n.º 27:084 do DG n.º 241 é promulgada a reforma de Carneiro Pacheco[15]. Esta reforma termina com a distinção entre curso geral e curso complementar assim como a bifurcação do ensino em letras e ciências. "*Carneiro Pacheco retirou, de forma intencional, uma das finalidades tradicionais do ensino liceal, que o vocacionava como propedêutico para o ensino superior*" (Vázquez & Aires, 2005). Esta desvalorização do ensino teve como consequência a uma diminuição dos conteúdos programáticos e a exclusão completa do Cálculo Diferencial dos programas de Matemática.

Pelo Decreto n.º 36:507 do DG n.º 216 de 17 de Setembro de 1947 é promulgada a reforma de Pires de Lima[16] última reforma do período em análise. Nesta reforma, é retomado o plano de estudos que tinha sido alterado na reforma de Carneiro Pacheco ou seja, o curso geral dos liceus passa a ter a duração de 5 anos, em regime de classe e o curso complementar passa a ter a duração de dois anos sendo bifurcado em letras e ciências, em regime de disciplinas. O objectivo do ensino complementar é preparar os alunos para o ingresso no ensino superior.

Os programas relativos a esta reforma foram publicados no Decreto n.º 37:112 do DG. N.º 247 de 22 de Outubro de 1948. Nesta reforma foi reintroduzido o Cálculo Diferencial nos programas do ensino Liceal excluído dos mesmos em 1936. No entanto, a noção de derivada é introduzida apenas no 7.º ano no

---

[14] Cordeiro Ramos (1888-1974) foi Ministro da Instrução Pública de 1930 a 1933.
[15] Carneiro Pacheco (1887-1957) foi Ministro da Educação Nacional de 1936 a 1940.
[16] Pires de Lima (1906-1970) foi Ministro da Educação Nacional de 1947 a 1955.

capítulo da Álgebra. Este facto foi alvo de criticas por parte dos matemáticos dessa altura. Um deles foi Sebastião e Silva que apreciou a reintrodução do estudo de derivadas no ensino secundário mas criticou a estrutura e a sequência dos conteúdos deste estudo. Para Sebastião e Silva *"...o autor ou autores do programa já se convenceram de que o capítulo das derivadas não foi colocado no lugar conveniente. De resto o estudo das derivadas deve ser feito em estrita conexão com o dos movimentos, na física. Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade, e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física – é um erro grave de pedagogia."* (Silva, 1951). Em 1954, Pires de Lima aprova os novos programas das disciplinas do ensino liceal. Estes visam a sua simplificação e uma melhor adequação ao nível de desenvolvimento dos alunos. Nestes novos programas o conceito de derivada volta ao programa do 6.º ano do curso complementar de ciências, no capítulo de álgebra, sendo precedido pelo estudo dos infinitésimos. Estes programas mantiveram-se em vigor até 1962, altura em foram publicados novos programas, que não são mais que uma cópia do anterior.

Relativamente à Matemática em geral, "*Em termos de ensino, os anos 40 e 50 são marcados pela memorização e mecanização. É preciso saber de cor demonstrações de teoremas geométricos e praticar listas infindáveis de exercícios segundo o paradigma do tristemente célebre Palma Fernandes. No entanto, os resultados deste ensino não eram propriamente brilhantes*" (Ponte, 2002).

2.º período: A matemática moderna (anos 50)

Em 1963, devido ao Movimento da Matemática Moderna é introduzido um novo programa denominado experimental para o 6.º e 7.º anos do ensino complementar que passa a vigorar em paralelo com o programa oficial. No novo programa experimental foram introduzidos novas matérias introduzindo, uma nova abordagem da Matemática e uma nova linguagem pontuada pelo simbolismo da Lógica e da Teoria dos Conjuntos.

Os novos temas incluídos no programa experimental são: Lógica, Teoria de conjuntos, Estruturas Algébricas, Números Complexos, Probabilidades, Estatística, Cálculo Integral e Cálculo Numérico Aproximado. Os temas "clássicos" que se mantêm são: Cálculo Diferencial, Geometria Analítica e Trigonometria. É retirado deste programa o tema Aritmética Racional.

No programa experimental o estudo do Cálculo Diferencial aparece no 7.º ano num capítulo próprio designado por *"Introdução ao Cálculo Diferencial"*.

Em 1967 a estrutura do ensino liceal é alterada sendo criado o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (constituído por dois anos), passando o curso geral dos liceus de sete para cinco anos e são também criados dois anos no Curso Complementar.

Em 1971, José Veiga Simão[17], ministro da Educação, apresenta dois documentos para a reforma do Ensino: Projecto do Sistema Escolar e Linhas Gerais de Reforma do Ensino Superior. Em 1974, o Ministério da Educação e Cultura publica novos programas para o ensino liceal que vão vigorar nesse mesmo ano. A Matemática tem dois programas: Um relativo à Matemática Moderna e outro relativo à Matemática Clássica pois apesar da generalização da Matemática Moderna ainda coexistiam turmas onde se leccionava esta Matemática.

O programa da Matemática Moderna apesar de ainda se notar a influência de Sebastião e Silva, foi tornado mais curto e os temas simplificados. Contempla um capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial intitulado "Introdução à Análise Infinitesimal" no 2.º ano do curso complementar (antigo 7.º ano). Quanto ao programa da Matemática Clássica também foi mais simplificado e reduzido em relação ao anterior. Neste programa, o estudo do Cálculo Diferencial é contemplado no 1.º ano do curso complementar (antigo 6.º ano) de ciências.

Em 1977 foi criado o Ano Propedêutico. A Biblioteca da Secretaria-Geral do Ministério da Educação dispõe no seu acervo de Programas Antigos do programa da disciplina de Matemática relativo ao Ano Propedêutico de 1979/1980. O programa de Matemática desse ano dividia-se nos cinco pontos seguintes:

1. Elementos de Geometria Analítica, Estudo Elementar das Cónicas;
2. Introdução à Análise Infinitesimal;
3. Estruturas Algébricas;
4. Números Complexos;
5. Vectores e Transformações Geométricas

Neste programa o Cálculo Diferencial é contemplado com um capítulo denominado *“Introdução à Análise Infinitesimal”*.

No ano lectivo de 1979-1980 começa a funcionar a título experimental o 11.º ano do curso complementar do ensino secundário. O programa deste ano contempla o Cálculo Diferencial num capítulo denominado “ Derivadas de Funções Reais de Variável Real.

No início dos anos 70, foram elaborados novos programas dentro do espírito da Matemática Moderna que foram introduzidos em todos os níveis de ensino. José Sebastião e Silva já não participou neste processo. Nesta generalização salientou-se o que era abstracto e formal, sem perder de vista o cálculo. O Movimento da Matemática Moderna teve de positivo os seguintes pontos:

- uma renovação dos temas;
- uma abordagem mais actual dos conceitos;
- uma preocupação com a interligação das ideias matemáticas;

mas o seu grande objectivo que era proporcionar uma melhoria das aprendizagens à entrada da universidade não foi atingido. Nos anos 70 começam as criticas a este movimento em diversos países. Os alunos estão cada vez mais desmotivados com a Matemática, não entendem os novos símbolos e os resultados nos exames pioram.

As aplicações da Matemática desapareceram por completo. Tudo o que remetia para o desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas, foi relegado para segundo plano. Os programas de Matemática

---

[17] José Veiga Simão (1929) foi Ministro da Educação Nacional de 1970 a 25 de Abril de 1974.

portugueses dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional.

3.º período: A emergência de uma nova perspectiva (anos 80)

Em 1980, entra em funcionamento o 12.º ano. O programa de Matemática relativo a este ano estava dividido em duas partes: Álgebra e Análise Real. O estudo do Cálculo Diferencial encontra-se no capítulo 5 denominado "Complementos sobre derivação de funções reais de variável real". Com este capítulo completa-se o estudo das derivadas iniciado no 11.º ano ao dar-se a derivada das funções leccionadas neste ano (exponencial, logarítmica, circulares e circulares inversas)".

Este programa do 12.º ano sofria de dois problemas: era demasiado longo o que fazia com que a maioria dos professores não o cumprisse e revelava um desfasamento em relação às matérias estudadas no ensino superior.

Estes problemas conduzem à necessidade de um novo programa para o 12.º ano.

No ano lectivo de 1983-1984 é publicado um novo programa para o 12.º ano. Segundo Aires & Vázquez, na introdução deste programa diz que *"...pretende constituir uma ponte que facilite ao aluno a transição do aluno do Ensino Secundário para o Ensino Superior, reduzindo quanto possível uma descontinuidade que actualmente existe e que resulta principalmente da forma de tratar as matérias e do regime de trabalho."* (Aires & Vázquez, 2005).

Neste programa foram retirados alguns temas mas o tema relativo ao Cálculo Diferencial não sofreu nenhuma alteração.

Em 14 de Outubro de 1986 foi publicada a Lei de Bases do Ensino Educativo. *"Urgia reorganizar todo o edifício educacional de forma a acolher, estruturadamente, as múltiplas alterações de que haviam sido alvo alguns segmentos do sistema. Novas exigências como o alargamento da escolaridade obrigatória, a integração do 12.º ano, entre outras, reclamavam uma alteração* *profunda."* (Aires & Vázquez, 2005) Com esta reforma o ensino secundário passa a ser constituído pelo 10.º, 11.º e 12.º anos.

Em 29 de Agosto de 1989 no Decreto n.º 286:89 do DR n.º 198 são publicados os "Novos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário" surgindo assim novos programas para as diversas disciplinas. O programa de Matemática é publicado em 1991 na forma de livro constituído pelos três anos do Ensino Secundário e posto em prática em regime de experiência pedagógica no ano lectivo de 1991/1992. Este programa tornou-se definitivo a partir do ano seguinte. Neste programa, o Cálculo Diferencial aparecia no 11.º ano no capítulo denominado "Funções III – Limites. Derivadas". Neste capítulo estudava-se limites e continuidade de funções, derivação de funções racionais, segunda derivada e aplicações. O estudo e aplicação do conceito de limite e derivada eram limitados às funções estudadas neste ano: funções polinomiais e algébricas. No 12.º ano, acrescenta-se ao estudo das funções estudadas no ano anterior, as funções irracionais, as funções trigonométricas e as funções exponenciais e logarítmicas. o Cálculo Diferencial aparece no capítulo "Funções V – Complementos sobre derivadas" e no capítulo "Funções VI – Funções Trigonométricas em IR". No capítulo V – Complementos sobre derivadas, estudava-se a derivada da função inversa e da função composta e suas aplicações, derivadas sucessivas e derivadas de funções implícitas. Era também feito o estudo de funções irracionais. O capítulo Funções VI – Funções Trigonométricas em IR tinha a seguinte estrutura: Fórmulas. Equações e identidade. Seno, co-seno e tangente como funções de variável real. Limites, continuidade, derivada, variação. Primitivas imediatas: cálculo de áreas.

Estes novos programas de Matemática do ensino secundário foram introduzidos com alguns sobressaltos. Os autores encarregados da sua elaboração assumiram uma escolaridade de 5 horas semanais, quando a carga lectiva da disciplina correspondia a 4h. Como não podia deixar de ser, o programa ficou demasiado extenso.

4.º período: O ajustamento de programas do ensino secundário (1997)

O programa de Matemática publicado em 1991 manteve-se em vigor até 1997 altura em que foi feito um ajustamento do programa. Este ajustamento, que na realidade corresponde a um novo programa começou a ser aplicado no ano lectivo de 1997-1998, no 10.º ano, no ano lectivo de 1998-99 no 11.º ano e no ano lectivo de 1999/2000 no 12.º ano.

Este novo programa distribui de forma diferente os temas presentes no programa anterior, fazendo corresponder cada tema a um período lectivo. Como a extensão do programa era uma das principais dificuldades dos professores nas escolas, a ajustamento do programa excluiu itens de conteúdo que pela experiência se verificou serem uma sobrecarga para os alunos e fazendo com que estes não tivessem acesso a temas fundamentais e fundadores.

O aspecto mais inovador deste ajustamento é a ênfase no uso da calculadora gráfica, considerando-a de uso “obrigatório”.

As questões de Lógica, Teoria de Conjuntos e de formas de raciocínio foram retiradas do corpo deste novo programa e passaram a estar referidas num tema à parte, com um determinado desenvolvimento. Pretendia-se que os professores não abordassem estas questões em si, mas as utilizassem quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica.

Este novo programa dá continuidade à tradição de privilegiar a iniciação à Análise Infinitesimal, sem esquecer o Cálculo Algébrico e a Trigonometria, e reserva um lugar significativo à Geometria, à Estatística e às Probabilidades.

Neste novo programa, o Cálculo Diferencial tem um capítulo próprio que lhe é inteiramente dedicado denominado “Introdução ao Cálculo Diferencial I” no 11.º ano e “Introdução ao Cálculo Diferencial II” no 12.º ano. O Cálculo Diferencial ainda aparece no capítulo “Trigonometria e Números Complexos” do 12.º ano onde se faz o cálculo da derivada das funções seno, co-seno e tangente.

5.º período: A actualidade

Em 2001 dá-se uma nova reestruturação dos planos de estudo do ensino secundário, onde a disciplina de Métodos Quantitativos desaparece e surgem novas disciplinas de matemática, para os cursos tecnológicos e para os alunos das áreas sociais. É revisto o programa dos alunos dos agrupamentos ditos “científicos”.

Actualmente, o Ensino da Matemática no secundário encontra-se dividido em 3 disciplinas com alguma autonomia entre si. Foi implementado o programa de Matemática A, iniciado em 2003/2004 para o 10º ano de escolaridade, e de Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Socais, ambos iniciados em 2004/2005.

O programa de Matemática A do 10.º ano foi homologado em 22 de Fevereiro de 2001, o do 11.º ano em 01 de Abril de 2002 e o do 12.º ano em 17 de Maio de 2002.

Na Matemática A, ao longo dos três anos do ensino secundário, os estudantes abordarão os seguintes temas: Números e Geometria, incluindo Vectores e Trigonometria; Funções reais e Análise Infinitesimal, Estatística e Probabilidades.

No programa de Matemática A do 11.ºano, o Cálculo Diferencial aparece no tema II denominado Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções Racionais e com Radicais. Taxa de Variação e Derivada.

No programa de Matemática A do 12.º ano, o Cálculo Diferencial aparece no tema II denominado “ Introdução ao Cálculo Diferencial”. Este tema tem como pré-requisitos Funções e Gráficos do 10.º ano e Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11.º ano. Os conceitos de limite, continuidade e derivada introduzidos no 11.º ano de uma forma intuitiva são estudados de forma mais rigorosa neste tema.

No programa de Matemática B do 11.º ano, o Cálculo Diferencial aparece integrado no tema II denominado “ Movimentos Não Lineares. Taxa de Variação e Funções Racionais”.

Os alunos tomam contacto com a taxa média de variação e com a taxa de variação instantânea, interpretando geometricamente estes conceitos.

No programa de Matemática B do 12.º ano, o Cálculo Diferencial aparece no tema IV denominado "Problemas de optimização, - aplicações das taxas de variação, - programação linear", como ferramenta de planeamento e gestão.

Neste tema será feita uma abordagem ao cálculo de variações e de limites, bem como ao estudo da continuidade, sem recurso às definições simbólicas rigorosas e às regras de cálculo.

O Cálculo Diferencial não aparece no programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

4.3. O Cálculo Diferencial no Compêndio de Matemática

O Cálculo Diferencial e de uma forma mais globalizante o cálculo infinitesimal como vimos anteriormente neste trabalho, desde o início do século XX até aos nossos dias sempre fez parte dos programas dos liceus com excepção na reforma de Carneiro Pacheco onde a sua exclusão foi duramente criticada por vários matemáticos incluindo-se entre eles Sebastião e Silva. Trata-se então de um tema clássico uma vez que não faz parte dos novos temas introduzidos pela Matemática Moderna mas que é abordado por Sebastião e Silva no Compêndio de Matemática pois para este respeitado matemático e pedagogo *"A análise infinitesimal é o ramo da matemática que maior êxito tem alcançado nas aplicações às ciências da natureza, e é por isso, também, o mais extenso, o mais rico, o mais fecundo, deixando a perder de vista a álgebra ou a geometria."* (Silva, 1951). No presente trabalho será feito um estudo ao modo como o Cálculo Diferencial é abordado por Sebastião e Silva no Compêndio de Matemática, pois será interessante perceber como aborda este prestigiado autor este tema clássico na perspectiva da Matemática Moderna.

A metodologia de análise utilizada tem por base a de Sierra, González e López (2003) e é semelhante à de Ponte (2004). Assim, neste estudo *"...se han* *considerado tres dimensiones del análisis...”*[18] (Sierra, et al., 2003): análise conceptual, análise didáctico-cognitiva e análise fenomenológica. A primeira irá ser considerada na descrição do modo como o tema é abordado, a segunda e terceira na análise que se irá referir à organização e ao grafismo, aos aspectos didácticos e aos aspectos fenomenológicos, de acordo com tabela idêntica à de Sierra, González e López (2003).

Análise conceptual	**Análise didáctico-cognitivo**	**Análise fenomenológica**
Sequência de conteúdos	Objectivos e intenções do autor	Em torno da própria matemática
Definições: tipo e papel que desempenham no texto	Teorias de ensino-aprendizagem	Em torno de outras ciências
Exemplos e exercícios		Fenómenos da vida quotidiana
Representações gráficas e simbólicas		

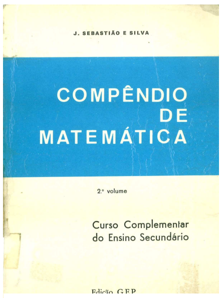


Fig. 3 - Capa

O Cálculo Diferencial aparece no 2.º volume do Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva constituindo o 1.º capítulo e é intitulado “ Introdução ao Cálculo Diferencial”. Sebastião e Silva dedica ao Cálculo Diferencial 201 páginas do Compêndio de Matemática.

Descrição

O capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial apresenta-se dividido em quatro parágrafos correspondendo a cada um os seguintes assuntos:

§1 – Cálculo numérico aproximado

[18]Tradução própria: Foram consderadas três dimensões de análise

§2 – Teoria dos limites de sucessões

§3 – Limites de funções de variável real

§4 – Derivadas

Por sua vez cada parágrafo anterior encontra-se dividido em vários pontos a que correspondem os diversos assuntos que o autor quer tratar. Ao longo do estudo destes assuntos vão surgindo com frequência exemplos, exercícios a rematar os vários pontos e algumas notas, por vezes adjectivadas de importantes, que tanto podem estar inseridas no próprio texto como em rodapé, sobre os assuntos abordados.

EXERCICIOS — I. Indique os desvios e os erros dos números

$$-1, \quad 0, \quad 2, \quad 3, \quad 2{,}1, \quad 2{,}3, \quad 2{,}34, \quad 2{,}339$$

em relação a 2,34.

II. Indique diversos valores aproximados de $\sqrt{3}$ a menos de 0,02 por excesso e por defeito.

III. Sabendo que 4,73 é valor aproximado dum número α a menos de 0,05, indique:

a) Uma vizinhança de α, tão pequena quanto possível, a que pertença o número 4,73(1).

b) Dois números tão próximos quanto possível, entre os quais esteja α.

Dê nova resposta à segunda alínea sabendo que: 1) 4,73 é valor aproximado de α por defeito; 2) 4,73 é valor aproximado de α por excesso.

Fig. 4 – Exemplo de exercícios do Compêndio de Matemática

No ponto 1 do §1 o autor dedica cerca de quatro páginas a tecer algumas considerações prévias intuitivas acerca dos conceitos de *“aproximadamente verdadeiro”* (p. 11), *“erro”* (p. 12) e *“números grandes” e “números pequenos”* (p. 12). Recorre a vários exemplos da vida quotidiana para ilustrar o carácter subjectivo destes conceitos tendo em conta que dependem de quem avalia, em que circunstâncias e quais os objectivos pretendidos.

Sendo o cálculo numérico aproximado o assunto tratado neste primeiro parágrafo e na sequência destas considerações é o próprio Sebastião e Silva quem diz que *"... o cálculo numérico aproximado é uma teoria matematicamente exacta de coisas inexactas"* (Silva, 1978).

Após todos os esclarecimentos concedidos pelo autor no ponto 1 torna-se de fácil apreensão que é impossível definir matematicamente valor aproximado, número grande ou número pequeno. Já a definição de *"erro de um valor aproximado"* é matematicamente rigorosa e surge no ponto 2, partindo de dois exemplos numéricos, como sendo o módulo do desvio desse valor (p.15). É dada formalmente a definição de desvio (p. 18) onde se utiliza a notação Δx para o designar assim como a definição de vizinhança (p. 16), erro por excesso e erro por defeito (p.17). Em nota de rodapé o autor alerta para o facto de que muitas vezes se chamar *"erro"* ao que é definido neste manual por *"desvio"*. Mais à frente, quando o assunto se tratar de funções os termos "variação" e "acréscimo" são sinónimos de "desvio".

No ponto seguinte, partindo de um exemplo faz-se um estudo sobre os algarismos exactos de um valor aproximado.

Os pontos 4, 7, 8, 10, 12 e 13 tratam da majoração do erro, respectivamente, de uma soma, de uma diferença, de um produto, de um quociente, de uma potência e de uma raiz. A fórmula de majoração do erro da soma (p. 22) é deduzida a partir da fórmula matemática que exprime que o desvio da soma é igual à soma dos desvios e da propriedade do módulo da soma. Na sequência deste estudo foi introduzido a noção de majorar um número e os termos majorante e minorante. É interessante que é dado o termo "maiorante" como sinónimo de "majorante". A majoração do erro de uma diferença é reduzida à majoração do erro da diferença uma vez que a diferença de dois números é igual à soma de um número com o simétrico do outro. Com o intuito de deduzir a fórmula da majoração do erro do produto, foi previamente deduzida e feita a sua interpretação intuitiva a partir de uma figura geométrica (p. 29), a fórmula do desvio do produto, classificada pelo autor como importante. Para obter a fórmula da majoração do erro do quociente foi utilizado o mesmo raciocínio que para a fórmula da majoração do produto. Isto é, deduz-se a fórmula da majoração do erro do quociente a partir da fórmula do desvio do quociente. Para deduzir a fórmula do desvio da potência a partir da qual se deduz uma fórmula da majoração do seu erro foi utilizado um resultado aprendido no 6.º ano e actualizado com a notação de desvio. A dedução da fórmula de majoração da raiz também se deduz da fórmula do desvio da raiz.

Nos pontos 5, 9 e 11 faz-se o cálculo aproximado respectivamente, de uma soma, de um produto e de um quociente com erro inferior a número dado. Trata-se do problema inverso do que foi estudado nos pontos imediatamente anteriores. O resultado obtido é sempre apresentado na forma de teorema.

O erro do valor simétrico e o erro do valor absoluto são tratados no ponto 6 do presente parágrafo. Para cada um destes erros foi dado um teorema. O teorema sobre o erro do valor simétrico (p. 25) foi traduzido por uma expressão simbólica cuja dedução não foi apresentada por ser considerada imediata. O teorema sobre o erro do valor absoluto (p. 26) apresenta demonstração.

No ponto 14 é dada a definição de desvio relativo e erro relativo. O desvio relativo é dado como sendo o quociente do desvio de um valor pelo próprio número e tem como notação $\Delta' x$. O erro relativo é dado como sendo o módulo de $\Delta' x$.

Os últimos três pontos deste parágrafo não são considerados de matéria obrigatória. Estes pontos tratam do erro relativo do produto, do quociente, da potência e da raiz. Para estudar o erro relativo do produto parte-se da fórmula do desvio do produto e deduz-se a fórmula do desvio relativo do produto. Desprezando o produto dos erros relativos dos factores por serem suficientemente pequenos obtém-se a fórmula aproximada do desvio relativo do produto. Esta torna-se exacta substituindo o conceito de desvio relativo pelo conceito de diferencial relativo a que o autor também designa por *"elasticidade"*. O estudo do erro relativo do quociente também parte da fórmula do desvio mas agora do quociente e deduz-se a fórmula aproximada do desvio do quociente que se tornará exacta fazendo a mesma substituição utilizada no estudo do erro relativo do produto.

No caso dos erros relativos da potência e da raiz apresentam-se as fórmulas aproximadas dos desvios relativos (p. 53) sem as deduzir por ser de dedução semelhante às anteriores.

O §2 inicia com o ponto 18 onde se vai estudar um método de aproximações sucessivas para o cálculo de raízes quadradas intitulado de Newton mas apenas no ponto 23 numa referência a este método. O método de aproximações sucessivas de Newton não é o primeiro método de aproximações com que os alunos tiveram contacto, uma vez que aprenderam no 1.º ciclo liceal um processo cálculo para determinar valores aproximados de uma raiz quadrada. Segundo o autor, o método apresentado pormenorizadamente neste ponto (p. 55) possui mais vantagens que o anterior principalmente quando se recorre aos computadores mas não refere quais.

No ponto 19 partindo do exemplo dos sucessivos valores aproximados de uma raiz quadrada de um número positivo visto no ponto anterior, é apresentada a definição de sucessão convergente utilizando uma linguagem matemática formal. Esta definição é depois traduzida em linguagem simbólica utilizando os símbolos da lógica matemática. É interessante reparar que nesta definição o autor utiliza a abreviatura “sse” para designar “se e só se”.

No ponto seguinte é relembrado o conceito de sucessão dado no 2.º ciclo e apresenta-se o termo geral de uma sucessão, denotado por u_n, como uma função real de variável natural, onde u_n é tratado por variável. De seguida são apresentadas outras notações além da habitual u_n para o termo geral de uma sucessão: $u(n)$, $f(n)$, $\varphi(n)$, empregadas habitualmente nas funções em geral. Neste ponto 20 é dada a definição de infinitésimo (p. 70). Como sinónimo do termo infinitésimo surge o termo infinitamente pequeno.

O ponto 21 inicia com a definição intuitiva de limite de uma sucessão surgindo de seguida o teorema da unicidade do limite de uma sucessão acompanhado de um esquema ilustrativo. Após a demonstração por redução ao absurdo deste teorema é apresentada a definição formal de limite de uma sucessão (p. 72) e o símbolo $\lim u_n$ para o representar.

TEOREMA 1 (DA UNICIDADE DO LIMITE). *Uma sucessão não pode tender para dois números diferentes.*

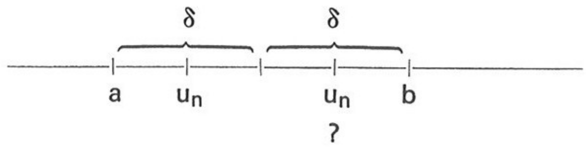


Fig. 5 – Teorema da unicidade do limite

De seguida são dados os teoremas do limite de uma sucessão constante e o teorema do limite do módulo de uma sucessão, ambos sem demonstração.

A álgebra dos limites é tratada no ponto 22. Aqui são apresentados teoremas sobre o limite da soma, do produto, do quociente e da raiz de uma sucessão. O limite da potência de uma sucessão e da diferença de duas sucessões é dado sob a forma de corolário. Com excepção do teorema do limite do quociente que foi deixada como exercício são dadas as demonstrações de todos estes teoremas e corolários.

No ponto 23 é descrito em pormenor o método geral das aproximações sucessivas a que se dá o nome de método de iteração. Um exemplo deste método é o método de Newton descrito no ponto 18 para o caso da radiciação. No ponto 24 são tratados dois critérios particulares de convergência de uma sucessão. No entanto, este ponto inicia com a noção de sucessão crescente e crescente em sentido lato, sucessão decrescente e decrescente em sentido lato, sucessão monótona e sucessão limitada. O primeiro critério a surgir é o critério das sucessões monótonas (p. 85) sem demonstração mas com diversas considerações sobre o modo de como se poderá fazê-lo. O outro critério apresentado é o das sucessões enquadradas e é apresentada a sua demonstração, embora não seja uma matéria obrigatória.

Os símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação surgem no ponto 25. A partir do teorema do limite do quociente dado no ponto 22 é feito um estudo à expressão que representa o quociente $\frac{a}{0}$ para o caso em que $a \neq 0$ e para o caso em que $a = 0$, designando-a por símbolo de impossibilidade no 1.º caso e por símbolo de indeterminação no 2.º caso. É referido que se irão conhecer outros símbolos de indeterminação.

O ponto seguinte trata dos limites infinitos onde se começa por dar a definição de infinitamente grande positivo, infinitamente grande negativo e infinitamente grande (simplesmente). De seguida é abordada a noção de sucessão propriamente divergente e de sucessão oscilante.

As operações com limites infinitos são tratadas no ponto 27 onde se começa por estabelecer três lemas (p. 90) com o objectivo de se puderem demonstrar os cinco teoremas sobre operações com limites infinitos que se apresentam (p. 92). Dois lemas e dois teoremas são demonstrados embora um de cada não seja matéria obrigatória.

Com o objectivo de facilitar a aplicação dos teoremas dados no ponto anterior foram adoptadas no ponto 28, um conjunto de cinco convenções que tornarão mais simples o cálculo de limites com o símbolo ∞. Estas convenções também irão permitir generalizar os teoremas relativos aos limites da soma, do produto e do quociente, assim como da potência e da raiz dados no ponto 22.

I. $\frac{a}{0} = \infty$, se $a \neq 0$. III. $a \,.\, \infty = \infty$, se $a \neq 0$

II. $\frac{a}{\infty} = 0$, se $a \neq \infty$. IV. $\frac{\infty}{a} = \infty$, se $a \neq \infty$

V. $a + \infty = \infty$, se $a \neq \infty$.

Fig. 6 – Convenções utilizadas

No ponto 29, a partir da inclusão das hipóteses excluídas nas cinco convenções apresentados no ponto anterior são obtidos três novos símbolos de indeterminação: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ e $(+\infty)+(-\infty)$. A partir de diferentes exemplos é dada a noção de “indeterminação aparente” e “indeterminação real” e em que consiste as expressões “levantar a indeterminação” e “impossível levantar a indeterminação”.

O limite da exponencial é apresentado no ponto 30. A partir do exemplo da sucessão cujos termos são as sucessivas potências de expoente natural de um número real qualquer é dado o teorema do limite da exponencial de base superior a um e dois corolários sendo apenas demonstrado o teorema.

O ponto seguinte faz o estudo do limite da soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica. Este ponto começa por fazer uma breve revisão à definição de progressão geométrica e à fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Seguidamente, faz uma análise à sucessão S_n apresentando através de um teorema o limite desta sucessão.

Os assuntos tratados no ponto 32 não são matéria obrigatória. Neste ponto é apresentado o método dos desenvolvimentos em série que se trata de mais um método de aproximações sucessivas não sendo no entanto, um método iterativo. A partir de um exemplo chega-se à noção de série, série convergente e série divergente. Como exemplo de série surge a série Binomial.

O último ponto deste parágrafo também aborda matéria não obrigatória e expõe resumidamente o método de Gräffe, que é um método geral de resolução de equações algébricas de qualquer grau.

O §3 começa com o ponto 34 onde a definição intuitiva de limite de uma função de variável real dada no Compêndio de Álgebra, que o autor pede para ser consultado, é dada neste ponto por meio da lógica simbólica. Esta definição de limite de uma função de variável real recorre à noção de limite de uma sucessão. Só no ponto seguinte é referido que esta definição é atribuída a Heine.

Assim, finalmente, a expressão 'f(x) $\to$ b *quando* x $\to$ a' vem a ser definida como abreviatura da seguinte:

$$u_n \to a \wedge u_n \neq a \ (\forall n) \Rightarrow f(u_n) \to b$$

Fig. 7 - Definição de limite segundo Heine

No ponto 35 é apresentada a definição de limite de uma função segundo Cauchy, embora seja uma matéria não obrigatória. Após ter dado a expressão intuitiva, apresenta a definição formal desse limite utilizando a lógica simbólica acompanhada por uma figura considerada importante para esclarecer essa definição.

DEFINIÇÃO. Diz-se que $f(x) \to b$ quando $x \to a$, sse:

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x)-b| < \delta$$

Fig. 8 – Definição de limite segindo Cauchy

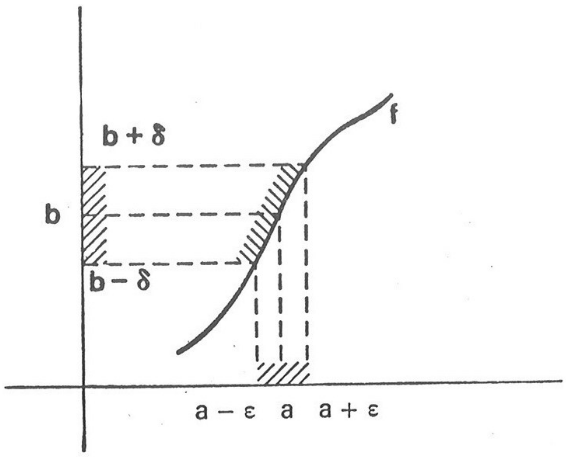


Fig. 9 – Figura apresentada para ilustrar o limite segundo Cauchy

Por fim prova-se que a definição de Cauchy é equivalente à definição de Heine.

O ponto 36 trata também de matéria não obrigatória que é o Axioma de Zermelo, nome do matemático alemão que o formulou.

No ponto 37 são estudados alguns limites de funções circulares e das funções exponencial e logarítmica. Relativamente à função seno, é mostrado, primeiro intuitivamente e depois demonstrado formalmente que não existe limite desta função quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$. É referido que se chega a este resultado para a função co-seno se utilizar um processo semelante ao da função seno. Quanto à tangente e co-tangente recorre-se às respectivas representações no círculo trigonométrico, sem, no entanto, mostrar qualquer figura para fazer o estudo de alguns limites destas funções. Começa-se por estudar o limite da tangente quando x tende $\frac{\pi}{2}$ por valores menores $\frac{\pi}{2}$ e quando x tende para $\frac{\pi}{2}$ por valores maiores que $\frac{\pi}{2}$. Generaliza-se os resultados obtidos para todos os pontos $\frac{\pi}{2}+n\pi$ com $n\in IZ$. Faz-se um estudo semelhante para a co-tangente mas nos pontos $n\pi$ com $n\in IZ$.

Por fim faz-se o estudo do limite da função exponencial de base superior a zero. Começando pelo caso em que $a>1$ e partindo do resultado obtido no ponto 30 estuda-se o limite quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$. Faz-se o mesmo estudo para o caso em que $a>1$.

Por fim são mostrados os limites de uma função logaritmica de base superior a 1 quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para 0.

O penúltimo ponto deste parágrafo trata da indeterminação $\frac{0}{0}$ através de um exemplo onde se aplica a regra de Ruffini.

O ponto 39 e último deste parágrafo trata das funções contínuas. Neste ponto dá-se a definição de função contínua num ponto segundo Cauchy. Esta definição é generalizada a uma função de duas variáveis reais. Por fim, é referido que a soma, o produto e o quociente de duas funções contínuas são funções contínuas em todo o seu domínio de existência.

Diz-se que uma função f é *contínua num ponto* a, sse *a* pertence ao domínio de f e, para todo o $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$, tal que, se *x* é valor aproximado de *a* a menos de ε, então f(x) é valor aproximado de f(a) a menos de δ; isto é, simbolicamente:

$$\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |f(x)-f(a)| < \delta$$

Fig. 10 - Definição de função contínua num ponto

No primeiro ponto do §4 parágrafo, atendendo aos conhecimentos adquiridos no §1 e à analogia entre conceito de desvio e o de acréscimo, deduzem-se as regras de derivação do produto e do quociente de duas funções $u=f(x)$ e $v=g(x)$, assim como a regra da derivação da raiz de uma função utilizando as notações de acréscimo Δx, Δy, Δu e Δv. O autor trata as variáveis dependentes u e v como se fossem as próprias funções mas em nota de rodapé considera esse abuso de linguagem inevitável para não complicar as notações. Não é deduzida a regra da derivada da função composta pois pode ser deduzida como no Compêndio de Álgebra sem, no entanto, esquecer de utilizar a linguagem moderna: *“se* $f(x) \equiv \varphi[\psi(x)]$, *diz-se que* f *é a função composta de* φ *com* ψ *e escreve-se* $f = \varphi \circ \psi$ *”* (p. 153). A regra da derivação da função inversa também pode ser deduzida como no Compêndio de Álgebra mas será tratada mais à frente no ponto 45 quando esta regra for necessária para deduzir a derivada da função logaritmica.

No 2.º ponto deste parágrafo, a partir da igualdade $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ juntamente com uma figura geométrica que visa esclarecer intuitivamente o conceito de diferencial é deduzida a fórmula deste. A partir da fórmula que define o diferencial obtém-se a notação $\frac{dy}{dx}$ para designar a derivada de y em ordem a x.

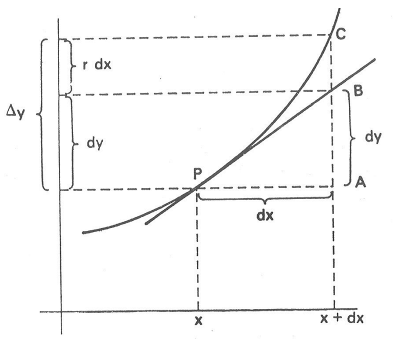


Fig. 11 – Figura ilustrativa do conceito de diferencial

No ponto seguinte a partir da definição de diferencial e das regras de diferenciação resultam regras análogas de diferenciação. O autor estende o conceito de diferencial a funções de mais de uma variável e com regras de diferenciação análogas às regras de diferenciação de funções de uma variável calcula o diferencial de uma função $z = f(x, y)$.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

Fig. 12 – Diferencial de uma função de duas variáveis

Refere que $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são as derivadas parciais da função, respectivamente em ordem a x e a y e indica como se obtêm. Termina este ponto com um exemplo onde determina o diferencial de uma função de duas variáveis utilizando a fórmula anterior e aplicando as regras de diferenciação.

$$z = \sqrt{x^2 + 3y}$$

tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}$$

e, portanto:

$$(2) \quad d\sqrt{x^2 + 3y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}}\, dx + \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\, dy$$

Fig. 13 – Diferencial de uma função utilizando a fórmula

$$d\sqrt{x^2 + 3y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\, d(x^2 + 3y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\, (2xdx + 3dy)$$

Fig. 14 – Diferencial de uma função utlizando as regras de diferenciação

No ponto 43, o autor tece algumas considerações acerca do papel do conceito de diferencial nas ciências experimentais e na engenharia onde se usam métodos abreviados de cálculo e raciocínio que utilizam os próprios diferenciais como se fossem os próprios acréscimos das funções carecendo, por isso, estes métodos de rigor.

No ponto seguinte o autor começa por calcular a derivada da função exponencial $x \to a^x$ utilizando a razão incremental, chegando ao resultado $D_x a^x = a^x \lambda(a)$, $\forall x \in IR$, $a > 0$, $a \neq 1$ e onde $\lambda(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ ou seja o limite $\lambda(a)$ é a derivada da função a^x no ponto zero. Utilizando o teorema das funções compostas generaliza-se a derivada da função exponencial quando se substitui x por $u = \varphi(x)$. O número e surge como $e = a^{1/\lambda(a)}$ e é designado por "base dos logaritmos neperianos". Refere-se que é irracional e são mostrados 11 algarismos exactos. Define-se logaritmo neperiano de a e dá-se a notação $\ln a = \log_e a$ e $\log_{10} a$ ao logaritmo decimal.

No ponto seguinte dá a derivada da função logarítmica através da aplicação da regra de derivação da função inversa.

O ponto 46 trata da derivadas das funções circulares onde o autor informa que as derivadas das funções circulares directas são deduzidas no Compêndio de Trigonometria. Para calcular as derivadas das funções circulares inversas o autor diz que basta aplicar o teorema das funções inversas.

No ponto seguinte trata-se de máximos e mínimos, concavidades e inflexões**.**

Neste ponto, o autor dá o teorema de Weierstrass pedindo para ser aceite intuitivamente, sem demonstração.

No ponto 48 é dado o Teorema de Cauchy**.** Em nota de rodapé, o autor considera este número muito interessante mas a sua leitura não se torna indispensável, nesta altura.

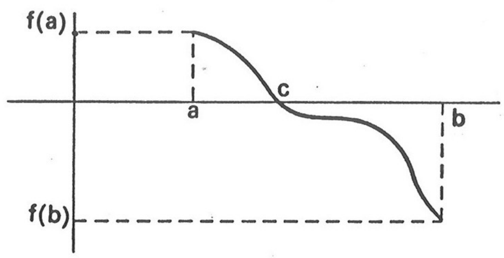
Após a apresentação do Teorema de Cauchy em linguagem rigorosa o autor dá o mesmo teorema de forma intuitiva e um exemplo concreto duma aplicação deste teorema.

TEOREMA DE CAUCHY. *Se* f *é uma função contínua num intervalo limitado e fechado* [a,b], *e se* f(a) $\neq$ f(b), *então* f *toma nesse intervalo, todos os valores entre* f(a) *e* f(b).

O autor indica que na prática o teorema de Cauchy se aplica ao cálculo de raízes:

Outro aspecto do teorema de Cauchy é o seguinte:

II. *Se uma função* f *é contínua num intervalo* [a,b] *e toma sinais contrários nos extremos do intervalo, então* f *tem pelo menos uma raiz nesse intervalo.*



Este número termina com as respostas aos exercícios do número anterior.

No ponto 49 é dado o método da tangente ou de Newton. Em nota de rodapé, o autor considera este ponto de leitura facultativa e recomenda-o para ser lido antes de se fazer uma visita a um centro de cálculo automático.

Neste ponto, o autor demonstra um método para calcular a raiz de uma função.

No ponto seguinte o autor dá o método da corda (ou regra da falsa posição). Neste ponto, o autor mostra um método para calcular por aproximações sucessivas uma raiz de uma função situada num intervalo fechado. O autor considera que este método tem vantagem em relação ao de Newton devido a só exigir duas condições prévias: a função tem de ser contínua e ter sinais contrários nos extremos do intervalo.

No último ponto deste parágrafo faz-se a interpolação por diferenças finitas. Neste ponto, o autor começa por apresentar o problema da interpolação considerando que tem uma importância fundamental no moderno cálculo numérico chegando à fórmula de interpolação por diferenças finitas.

Análise

Organização e grafismo. Todo o capítulo está subdividido em 51 pontos identificados a negrito e numerados sequencialmente de 1 a 51 distribuídos da seguinte forma: os pontos 1 a 17 pertencem ao Cálculo numérico aproximado, os pontos 18 a 33 à Teoria dos limites de sucessões, os pontos 34 ao 39 aos Limites de funções de variável real e finalmente os pontos 40 ao 51 às derivadas.

Todo o corpo do texto é escrito apenas utilizando a cor preta. São utilizados diversos tipos de letra como maiúsculas, minúsculas escritas tanto a negrito como simples.

Este manual utiliza alguns gráficos de funções para ilustrar algum assunto como o a derivada da função exponencial (p. 166), o Teorema de Cauchy (p. 177), o método da tangente ou de Newton (p. 186), método da corda ou regra da falsa posição (p. 190) e a fórmula de interpolação por diferenças finitas (p. 196 e 197). Também recorre a figuras geométricas como por exemplo para dar a fórmula do desvio do produto (p. 29), a esquemas como o utilizado para clarificar a definição de valor aproximado de x com erro inferior a δ (p. 16), para ilustrar o teorema da unicidade do limite (p. 72).

Aspectos didácticos. Ao longo deste capítulo o autor pede com frequência para o leitor recorrer ao Compêndio de Álgebra livro único da altura da experiência-piloto e do qual é co-autor para ver definições, exemplos ou notas históricas e também ao Compêndio de Trigonometria.

O Compêndio de Matemática não está apenas dirigido a alunos mas também aos próprios professores como é manifesto numa nota de rodapé (p. 129) e no ponto 34 do §3 acerca de definição de limite de uma função que irá ser esclarecida por meio da lógica simbólica *"As considerações que vão seguir-se dirigem-se mais propriamente ao professor, para orientação didáctica. Mas devem ser aconselhadas como leitura aos alunos mais interessados"* (Silva, 1978).

De uma forma geral, os assuntos tratados neste manual escolar começam por ser estudados de uma forma intuitiva a partir de exemplos passando depois para um estudo mais formal, onde se utiliza uma linguagem rigorosa e simbologia lógica. Este estudo intuitivo dos conceitos está muito explícito ao longo de todo o capítulo. Começa logo no ponto 1 do §1 (p. 11) onde são feitas *"considerações prévias intuitivas"* , no ponto 8 do mesmo parágrafo, em relação à fórmula do desvio do produto mostra-se uma figura para se puder fazer a sua *"…interpretação geométrica intuitiva..."* (p. 29), no ponto 34 do §3 acerca da noção de limite de uma função é referido que a *"...noção intuitiva acabou por ser completamente logificada (....) a evolução que se deu no sentido da intuição para a lógica."* (p. 132), no ponto 35 do §3 acerca da definição de limite é apresentada uma *"...expressão Intuitiva"* (p. 132).

Portanto, o autor segue o método analítico uma vez que os fundamentos da aritmética e da análise com as respectivas axiomáticas surgem no fim do estudo de um conceito e não no seu início. O próprio Sebastião e Silva refere neste manual que *"...estaremos a seguir o método analítico, característico da investigação, em vez do método sintético, de que se faz uso e abuso na exposição do tipo tradicional."* (Silva, 1978). Também para este consagrado autor,

“...a ordem lógica na apresentação dos assuntos não é, muitas vezes, a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Devemos, pelo contrário, procurar seguir um caminho em ziguezague, de tentativa e erro, por aproximações sucessivas, semelhante ao da investigação. Numa palavra, convém seguir, tanto quanto possível, o método heurístico.” (Silva, 1978).

Neste capítulo, cálculo numérico aproximado serve como base heurística para introduzir o Cálculo Diferencial pois o primeiro *“...é o estudo dos valores aproximados que conduz naturalmente à teoria dos limites, base de toda a ANÁLISE INFINITESIMAL, que, tal como a aritmética dos números naturais, pode ser desenvolvida com rigor lógico impecável, a partir de um sistema de axiomas.”* (Silva, 1978).

O capítulo analisado apresenta uma abordagem aos assuntos com um nível de abstracção e formalização bastante elevado. Para além da utilização de uma linguagem formal e rigorosa com utilização de símbolos lógicos nas definições, por vezes é pedido ao aluno que recorra a imagens mentais para compreender certos assuntos como no ponto 37, (p. 142) acerca do limite da tangente onde se recorre ao circulo trigonométrico sem apresentar qualquer figura. É também solicitado que o aluno trabalhe autonomamente, isto é sem ajuda como no ponto 8 onde este deve relacionar uma figura com as fórmulas dadas anteriormente *“...sem auxílio alheio”* (p. 29). Os alunos são solicitados para provar resultados por redução ao absurdo como no exemplo II do ponto 19 do §2, (p. 64), trabalha-se o conceito de continuidade para funções de mais de uma variável (p. 148), são dadas as derivadas parciais (p. 158).

Uma parte significativa de assuntos tratados no capítulo de Introdução ao Cálculo Diferencial não é obrigatória no curso-piloto estando estes assuntos assinalados com asterisco ou em nota de rodapé. Esses assuntos surgem logo no §1 com o erro relativo do produto (p. 50), do quociente (p. 51), da potência e da raiz (p. 52), no §2 encontra-se o método de Gräffe (p. 117), no §3 o Axioma de Zermelo (p. 135) e no último parágrafo o Teorema de Cauchy (p. 177), o método de Newton (p.183), o método da corda (p. 189) e a interpolação por diferenças finitas (p. 191). Para Sebastião e Silva estes assuntos destinam-se *“...em* *princípio, a elucidação dos professores e, eventualmente, a satisfazer a curiosidade dos alunos mais interessados.”* (Silva, 1978).

Este capítulo contem várias considerações de ordem geral e humana da parte do autor que podem surgir dentro do corpo de texto como em notas de rodapé. Assim, o autor dá conselhos de como resolver exercícios evitando cálculos laboriosos (p. 32) ou sobre a ordem pela qual deverão ser estudados os exemplos (p. 104), relembra conceitos necessários para a compreensão de novos assuntos (p. 64), informa como funciona um computador (p. 21 e 124), esclarece sobre correntes matemáticas (p. 138) entre outros.

O aluno é muitas vezes solicitado para intervir na resolução de problemas. Por exemplo no ponto 6 do §1 afirma-se que a dedução de uma expressão é imediata e o autor escreve “*(justifique)”* (p. 25). Surgem muitas vezes as perguntas “porquê” para justificar os passos no desenvolvimento de um exercício.

Aspectos fenomenologicos. Os exemplos são maioritariamente numéricos ou algébricos mas também são dados exemplos da vida quotidiana como a distância de Lisboa ao Porto (p. 12), a temperatura de um doente (p. 12), a classificação de um aluno (p. 12) ou até mesmo as explorações espaciais (p. 12). Surgem também exemplos de outras áreas do conhecimento: a quantidade de electricidade que passa num sector de um fio condutor (p. 162) da Física, a quantidade de calor para aumentar a temperatura de um grama de certa substância (p. 163) da Química.

Este manual tem várias referências à utilização do computador como as sucessivas transformadas de Gräffe (p. 123), no cálculo aproximado da soma da série (p. 115) ou numa nota de rodapé sobre o funcionamento de um computador no cálculo de algarismos significativos (p. 21), a propósito de um método de aproximações sucessivas diz que traz mais vantagem quando se recorre a computadores (p. 55). Os cálculos dos diversos exemplos apresentados são dirigidos por uma matemática do L.N.E.C.

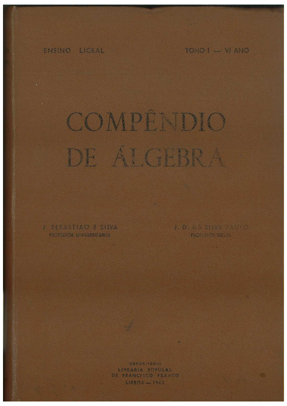
Este manual tem várias referências históricas: para mostrar a rapidez de uma progressão geométrica refere-se a V. Asaphad, historiador árabe, que conta a história da recompensa pretendida por Sessa por ter inventado o jogo de xadrez

(p. 109), numa referencia ao princípio do terceiro excluído e ao axioma de zermelo fala sobre a escola intuicionista (p. 139) e sobre a vida dramática dos matemáticos Zermelo e Cantor. Para além destas referências o autor remete para consulta o Compêndio de Álgebra. Atribui a notação $\frac{dy}{dx}$ para designar a derivada de uma função ao matemático Leibniz (p. 157) e refere-se a Newton (p. 158) como o primeiro matemático que concebeu a derivada como o limite da razão incremental $\Delta y / \Delta x$, quando $\Delta x \to 0$.

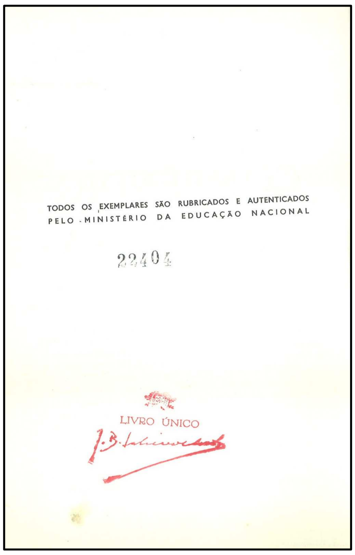
4.4. O Cálculo Diferencial noutros manuais

Após o estudo feito ao modo como Sebastião e Silva aborda o Cálculo Diferencial no compêndio de Matemática torna-se relevante perceber como este tema é abordado noutros manuais escolares portugueses dirigidos a alunos do último ano do ensino secundário. Assim, usando a metodologia de análise utilizada no estudo do Cálculo Diferencial no Compêndio de Matemática será estudado o modo como este tema é apresentado em quatro manuais representativos do Ensino da Matemática desde o início do projecto-piloto da Matemática Moderna até aos nossos dias. Pretende-se fazer esta análise com o objectivo de identificar os aspectos que foram alterando na abordagem do Cálculo Diferencial. Um dos manuais analisados é o livro único da altura em que foi introduzida a Matemática Moderna em Portugal e portanto contemporâneo do Compêndio de Matemática. Os outros manuais foram escolhidos tendo em atenção as diferentes décadas a que pertencem: um manual dos anos 80 correspondendo ao programa de 1983, outro dos anos 90 correspondendo reajustamento de 1997 e por último um manual da actualidade correspondendo ao programa de matemática de 2002. Por fim, serão feitas algumas considerações acerca do que mudou no tratamento deste tema nos manuais escolares num período de mais de quarenta anos.

Compêndio de Álgebra



Trata-se de um livro em dois volumes, o tomo I para o 6. º ano e o tomo II para o 7.º ano. Foi publicado em 1963 e a sua depositária foi a Livraria Popular de Francisco Franco, em Lisboa. Os seus autores são José Sebastião e Silva e J. D. da Silva Paulo e é informado que o primeiro é Professor catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa e o segundo Professor Efectivo do Liceu Nacional de Oeiras. Trata-se do livro único aquando do início da experiência da Matemática Moderna, tendo escrito na contracapa "Aprovado oficialmente como livro único (Diário do Governo n.º 100, II série, de 27 de Abril de 1963)". Na página anterior ao prefácio tem também o carimbo oficial que atesta essa aprovação. É a este livro que Sebastião e Silva no seu Compêndio de Matemática, no capítulo de "Introdução ao Cálculo Diferencial", solicita bastas vezes que os alunos o consultem.



Descrição

Este livro está dividido em vinte e três capítulos numerados em numeração romana, os dez primeiros pertencem ao tomo I e os outros treze ao tomo II. A divisão dos capítulos varia de um para o outro. Uns encontram-se divididos em parágrafos, que por sua vez estão divididos em vários pontos. Outros apenas se encontram divididos em pontos.

Como o Cálculo Diferencial aparece neste manual no tomo I, isto é, no volume dedicado ao 6.º ano, é este volume que será analisado. Este volume tem 314 páginas e é constituído pelos seguintes capítulos:

Capítulo I – Evolução do conceito de número

Capítulo II – Os números reais como medidas de grandezas e como abcissas de pontos

Capítulo III – Números complexos

Capítulo IV – Funções reais de variável real

Capítulo V – Limites de sucessões

Capítulo VI – Limites de funções de variável real

Capítulo VII – Funções contínuas

Capítulo VIII – Derivadas

Capítulo IX – Polinómios numa variável

Capítulo X – Fracções algébricas

Para a presente estudo só irão ser objecto de análise os capítulos V, VI, VII e VIII e os parágrafos 2 e 3 do capítulo X.

Cada capítulo termina com exercícios sobre os assuntos abordados e as respectivas respostas.

EXERCÍCIOS

1. Mostre, aplicando directamente a definição de continuidade e os teoremas sobre limites, que a função $\frac{x}{(2+x)^2}$ é contínua no ponto 2 e descontínua no ponto -2.

2. Mostre, aplicando directamente a definição de continuidade, que a função $\frac{x+1}{x^2-4}$ é contínua em todo o ponto a distinto dos pontos 2 e -2 e descontínua nestes pontos. Prove os mesmos factos, aplicando os teoremas sobre funções contínuas.

3. Determine os pontos em que é contínua e aqueles em que é descontínua a função $\frac{3x+1}{2x^2-1}$. Justifique a resposta.

Fig. 15 – Exemplo dos exercícios de final de capítulo

O capítulo V inicia com a informação que este capítulo vai estudar mais a fundo a noção de limite, que já tinha sido abordada em anos anteriores na geometria, aplicada à dedução de fórmulas de áreas e de volumes. Em nota de rodapé também se informa que as definições fundamentais abordadas neste capítulo já tinham sido abordadas com *"perfeito rigor"* (Silva & Paulo, 1963) no 4.º ano cujo manual utilizado era o Compêndio de Álgebra, 2.º Ciclo, de J. Jorge Calado.

No §1 deste capítulo são dadas as definições de funções de variável natural, sucessões, sucessões monótonas, sucessões limitadas, infinitamente grande positivo, infinitamente grande negativo, infinitamente grande em módulo e infinitésimos. É curioso verificar que os autores designam por “variável” uma sucessão u_n.

> A variável u_n pode ser dada por uma expressão analítica em n. Por exemplo, se for
>
> $$u_n = \frac{n}{n+1},$$
>
> e atribuirmos a n sucessivamente os valores 1, 2, 3 ..., obtemos a sucessão:
>
> $$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{9}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots$$

Fig. 16 – Exemplo da notação utilizada para u_n

No parágrafo seguinte dão-se seis teoremas sobre infinitésimos e infinitamente grandes: o inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo, o inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande, a soma e o produto de dois infinitésimos é sempre um infinitésimo, o produto duma constante numérica por um infinitésimo é sempre um infinitésimo, o produto de uma constante diferente de zero por um infinitamente grande é um infinitamente grande. Todos os teoremas são demonstrados com excepção de dois por a sua demonstração ser análoga a uma das anteriores. Considerando que é útil para saber se uma sucessão é um infinitamente grande ou um infinitésimo, os autores apresentam o critério de comparação que não demonstram por para isso bastar aplicar algumas das definições dadas anteriormente. O conceito de limite define-se no §3 recorrendo ao conceito de infinitésimo e nesse mesmo parágrafo apresentam-se e demonstram-se os teoremas da unicidade do limite, das constantes e das sucessões enquadradas.

> DEFINIÇÃO 5. Diz-se que uma variável u_n, função de n, **tende para** um número a (ou **tem por limite** a), quando a variável $u_n - a$ é um infinitésimo.

Fig. 17 – Definição de limite de uma sucessão

O §4 inicia com um ponto que esclarece quais as convenções utilizadas relativamente ao símbolo de infinito e define-se intervalo infinito. De seguida é introduzida a noção de sucessão indeterminada. Neste parágrafo, é ainda feita a classificação das sucessões em convergentes, divergentes e dentro destas propriamente divergentes e oscilantes. É apresentado um esquema clarificador desta classificação. Por fim, é apresentado e demonstrado o teorema das sucessões monótonas. O §5 trata das operações sobre limites onde são apresentados e demonstrados os teoremas do limite da soma, do produto, do quociente e da raiz. A demonstração deste último teorema encontra-se em apêndice no final do volume. Na forma de corolário do teorema do limite do produto aparece o limite da potência e da diferença.

No capítulo VI estuda-se a noção de limite para funções de variável contínua. A partir de um exemplo e com a ajuda de uma representação gráfica de uma função é introduzida a definição de limite de uma função e são deduzidos teoremas sobre limites de funções de variável real análogos aos teoremas sobre limites de sucessões. Da mesma forma, dos teoremas das operações sobre limites de sucessões são deduzidos teoremas análogos para limites de funções de variável real.

DEFINIÇÃO 1. *Sendo* $f(x)$ *uma função qualquer e sendo* a *e* b *constantes quaisquer, finitas ou infinitas, diz-se*

«$f(x)$ **tende para** b **quando** x **tende para** a»,

se, a **toda** *a possível sucessão de valores de* x *tendente para* a *(sendo esses valores diferentes de* a*), corresponde uma sucessão de valores de* $f(x)$ *tendente para* b [1].

Fig. 18 – Definição de limite de funções

É apresentada a título informativo outra maneira de definir limite de uma função que de acordo com os autores é mais adoptada no ensino superior.

3*. **Outra maneira de definir limite duma função.** — Em matemática superior adopta-se de preferência a seguinte definição de limite duma função:

DEFINIÇÃO 2. Sendo a e b números reais, diz-se que uma função $f(x)$ *tende para* b *ao tender* x *para* a, quando, dado um número positivo δ qualquer (por menor que seja), se pode sempre encontrar um número positivo ε de modo que se tenha

$$|f(x)-b|<\delta, \quad \text{desde que seja} \quad |x-a|<\varepsilon, \quad \text{com} \quad x\neq a.$$

Fig. 19 – Outra maneira de definer limite

Por fim, é dada a definição de infinitésimos simultâneos, limites laterais, limites laterais infinitos e expressões analíticas transcendentes.

O capítulo VII trata de funções contínuas, começando pela definição de função contínua num ponto.

> DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma função $f(x)$ é **contínua num ponto** a, quando este ponto pertence ao domínio da função e o acréscimo $k = f(x) - f(a)$ é infinitésimo com o acréscimo $h = x - a$.

Fig. 20 – definição de função continua num ponto

Seguidamente, apresenta-se a definição de função contínua num conjunto de pontos. São apresentados de seguida os teoremas sobre funções contínuas: a soma, a diferença e o produto de duas funções contínuas num ponto ainda são funções contínuas nesse ponto. O quociente de duas funções contínuas nesse ponto é ainda uma função contínua nesse ponto, desde que o divisor aí não se anule e toda a potência de expoente natural e toda a raiz de índice natural duma função contínua num dado ponto são ainda funções contínuas nesse ponto, supondo que o valor da função não é aí negativo, no caso do índice par. O capítulo termina com 18 exercícios.

O capítulo VIII trata das derivadas. No §1 deste capítulo é dada a definição de declive ou coeficiente angular de uma recta a partir de um exemplo da vida real. Seguidamente generaliza-se a definição de declive a uma curva representativa de uma função contínua e dá-se a definição de tangente à curva num ponto. No §2 começa-se por dar a definição de razão incremental de uma função, dando de seguida a definição de derivada da função.

> DEFINIÇÃO. Chama-se **derivada da função** $f(x)$ **em** x_0, e representa-se por $f'(x_0)$, o limite da razão incremental de $f(x)$ entre x_0 e x, quando x tende para x_0 (se esse limite existir). Em fórmula:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h}}$$

Fig. 21 – Definição de derivada

Seguidamente, é dado o significado geométrico da derivada e é apresentado e demonstrado o teorema que relaciona derivabilidade com continuidade. É dada então, a definição de função derivada fazendo-se a interpretação cinemática do conceito de derivada. O §3 está dedicado às regras de derivação sendo dadas as fórmulas da derivada duma função linear, inclusive os casos particulares da derivada de uma constante e da derivada de x, derivada de uma soma, derivada do produto, derivada de uma potência de expoente natural, derivada de um quociente, derivada de uma função inversa, derivada de uma função composta, derivada de uma potência de expoente racional.

No §4 começa-se por admitir, sem demonstração, o sentido de variação de uma função. Dá-se a noção de vizinhança de um número real para se definir máximo e mínimo relativo ou local e absoluto mas dá-se como regra o facto de um ponto em que a derivada da função muda de sinal, passando de positiva a negativa, é ponto de máximo relativo, supondo que a função é contínua nesse ponto. Análogamente o ponto em que a derivada da função muda de sinal, passando de negativa a positiva, é ponto de mínimo relativo.

No capítulo X, o §2 trata dos símbolos de impossibilidade onde se apresenta $\frac{a}{0}$ se $a \neq 0$ como um símbolo de impossibilidade e diz-se que por convenção tem valor ∞. O §3 trata dos símbolos de indeterminação $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ e $0 \times \infty$. É utilizada a expressão “levantar a indeterminação” para encontrar o valor do limite, se ele existir das expressões que conduziram às indeterminações referidas dizendo que então se trata de uma indeterminação “aparente”.

Análise

Organização e grafismo. Este livro é sensivelmente mais pequeno que o Compêndio de Matemática, tendo de dimensões aproximadamente 14,5cm x 21,5cm. A capa é de uma só cor tendo sido utilizado o castanho com letras a preto.

O texto é denso, não sendo utilizada na sua escrita qualquer outra cor para além do preto. A letra é de tamanho reduzido e o entrelinhamento apertado. São utilizados alguns gráficos e tabelas para ilustrar os conteúdos abordados.

Aspectos didácticos. É de notar que o Cálculo Diferencial se encontra num livro de Álgebra. Comparando com o Compêndio de Matemática, este tema é abordado um nível etário dos alunos abaixo pois o volume onde se encontra é para o 6.º ano. Com excepção dos dois últimos, cada capítulo abre com uma breve introdução onde se esclarece que assuntos vão ser abordados nesse capítulo, relacionando-os com os assuntos tratados no anterior. Recorre-se à representação gráfica para um estudo mais intuitivo (p. 187). As noções são dadas a partir de exemplos como no caso do ponto 1 do capítulo VI.

Aspectos fenomenológicos. A maioria dos exemplos são formulados em termos algébricos mas também aparecem de natureza geométrica relativo à área de um quadrado (p. 155), perímetro de um polígono (p. 169) ou representação gráfica de uma função (p. 187). Surgem exemplos da vida quotidiana: utilização de uma máquina fotográfica (p. 166), arrefecimento de água num frasco (p. 202), rampa de uma estrada (p. 215) ou uma viagem de automóvel de Lisboa ao Porto (p. 223). São também dados vários exemplos da vida quotidiana (p. 201) para introduzir a noção de continuidade. Também figuram exemplos relacionados com outras áreas do conhecimento: uma fonte luminosa na óptica (p. 166) ou a velocidade e aceleração na física (p. 224).

Este manual tem bastantes referências à história da matemática. No final dos capítulos V e VIII há, respectivamente, cinco e sete páginas dedicadas exclusivamente à história da matemática com o título de notas históricas.

Livro de texto 12º matemática

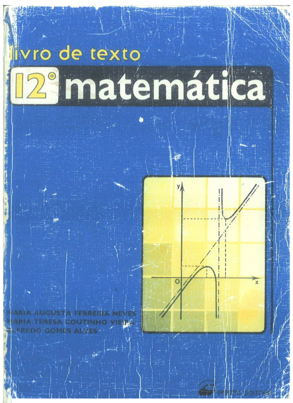


Fig. 22 - Capa

Trata-se de um livro publicado em 1984, em 1.ª edição, pela Porto Editora e é constituído apenas por um único volume. Este livro é editado passados 10 anos do 25 de Abril e cerca de 20 da reforma da Matemática Moderna em Portugal. Este livro é um livro de editora. Este manual é elaborado segundo o programa do 12.º ano que entrou em vigor no ano de 1983-1984.

Os autores deste manual são Maria Augusta Ferreira Neves, Maria Teresa Coutinho Vieira e Alfredo Gomes Alves.

Descrição

Este livro tem de dimensões aproximadamente 19cm x 24,5cm, tendo dimensões ligeiramente maiores que o Compêndio de Matemática e que do livro anterior. Graficamente a capa deste livro é mais colorida que os dois anteriores. O corpo do livro tem uma novidade em relação ao Compêndio de Matemática e ao livro anterior: além da cor preta é utilizada também a cor azul. Este manual está dividido em doze capítulos que por sua vez estão divididos em vários temas e estes em vários subtemas. Os capítulos que constituem este manual são:

1. Estruturas algébricas
2. O corpo dos números reais IR
3. Fórmulas trigonométricas correntes
4. O corpo complexo C
5. Espaços lineares
6. Método de indução matemática
7. Complementos sobre sucessões
8. Funções reais de variável real
9. Derivadas de funções
10. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy
11. Representação gráfica de funções
12. Cónicas

Este manual inicia com um prefácio da autoria dos autores onde este consideram *"...importante ter em consideração que os alunos quando ingressam no 12.º ano de Escolaridade, têm, em geral, pouco treino para acompanharem – e muito menos construírem – demonstrações de Matemática. Contudo, alguns dos delicados assuntos, que constituem o actual programa desta disciplina, exigem-*

lhes já uma certa capacidade para o fazer." (Neves et al, 1984). Acrescentam ainda que *"Atendeu-se, por isso, ao rigor que se torna necessário introduzir no tratamento dos diversos temas, sem, no entanto, cair em excessos que os tornaria de difícil compreensão".* (Neves et al, 1984). Neste prefácio fazem referência à estrutura do manual e aconselham a utilização do livro de exercícios "Exercícios de Matemática" dos mesmos autores que consideram complemento indispensável para uma boa aprendizagem.

Todos os capítulos deste livro terminam com um esquema resumo da estrutura adoptada nesse capítulo.

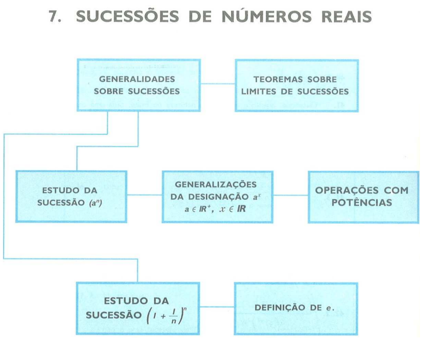


Fig. 23 – Esquema resumo estrutura

Ao longo da abordagem dos novos conceitos são propostas na margem direita de cada página algumas questões relacionadas com esses conceitos. No fim de cada tema são dadas algumas páginas de exercícios para os alunos resolverem e as respectivas soluções.

Exercícios

63. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{2n},\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n-1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

63. 1. Mostre que $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{2n} = \frac{1}{2}$ e que $\lim \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n-1} = e^3$.

63. 2. Prove que A e B não são abertos nem fechados.

63. 3. Averigúe se $A \cup B$ é fechado ou aberto.

63. 4. Determine o derivado e a aderência dos conjuntos A, B e $A \cup B$.

Fig. 24 – Exercícios finais

Neste livro, a parte dedicada ao Cálculo Diferencial inicia no capítulo 7 e termina no capítulo 11 inclusivé, num total de 127 páginas.

1. 3. Sucessões convergentes

Uma sucessão (u_n) converge para $a \in IR$ (ou tem por limite a), quando, para todo o número positivo δ, existe um correspondente número p, tal que:

$$n > p \underset{n}{\Longrightarrow} |u_n - a| < \delta.$$

$$\boxed{\lim u_n = a} \Leftrightarrow \boxed{\forall \delta \in IR^+ \exists p \in IN : n > p \underset{n}{\Longrightarrow} |u_n - a| < \delta}$$

Fig. 25 – Definição de sucessão convergente

No capítulo 7 faz-se um estudo às sucessões de números reais. É dada a definição de sucessão convergente e através de dez teoremas, as operações sobre limites onde apenas são demonstrados quatro porque os outros já teriam sido demonstrados no ano anterior. É feito o estudo da sucessão a^n, com $n \in IR$ e da generalização da designação $a^x, a \in IR$ e $x \in IR^+$ e posteriormente faz-se o estudo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e define-se o número e.

O capítulo 8 inicia com noções topológicas como espaço métrico e vizinhança, onde é dado o Teorema de Bolzano-Weierstrasss sem demonstração. Segue-se o estudo de funções contínuas, onde é dada a definição de função contínua num ponto. A continuidade da função composta é dada através de um teorema com demonstração. Seguidamente, é dado o Teorema de Bolzano ou Teorema dos valores intermédios e o Teorema de Weierstrass.

1. Teorema de Bolzano

Se f é contínua em $[a, b]$ e k é um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um número c, interior do conjunto $]a, b[$, tal que $f(c) = k$. (¹)

Fig. 26 - Teorema de Bolzano

Corolário: Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, então a função admite pelo menos um zero no intervalo $]a, b[$.

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ é contínua em } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases}} \Longrightarrow \boxed{\exists c \in]a, b[: f(c) = 0}$$

Fig. 27 – Corolário Teorema Bolzano

Após estes teoremas, é feito o estudo da continuidade das funções circulares $senx$, $\cos x$, tgx e $\cot gx$. De seguida estuda-se o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ e, através do teorema da função composta, generaliza-se o estudo deste limite a $\lim\limits_{x\to -\frac{\beta}{\alpha}}\frac{sen(\alpha x+\beta)}{\alpha x+\beta}$. De seguida estudam-se as funções trigonométricas inversas arco-seno, arco-co-seno arco-tangente e arco-cotangente, a função exponencial e a função logarítmica**.**

O capítulo 9 inicia-se com a definição de recta tangente a uma curva num ponto. A partir da definição de declive da recta tangente a uma curva num ponto é dada a derivada de uma função num ponto, apresenta-se a definição de função derivável e termina-se por referir o significado geométrico de derivada de uma função. Segue-se com o estudo intuitivo das derivadas à esquerda e à direita de um ponto para depois dar a definição rigorosa destas e o seu significado geométrico. Através de um Teorema, relaciona-se a derivabilidade com continuidade. A partir do cálculo da derivada de uma função em dois pontos distintos dá-se a definição de função derivada e, de função diferenciável. Da msma forma são dadas as regras de derivação sem demonstração da derivada da função $f(x)=ax+b$, da soma ou da diferença, produto, da potência de expoente natural, do quociente, da função composta, da função inversa e da raiz, assim como as derivadas das funções circulares, das funções trigonométricas inversas, função exponencial e da função logarítmica.

Com o título de derivadas sucessivas dá-se a definição de função derivada de segunda ordem e faz-se o estudo desta até à ordem n onde no final se apresenta a respectiva fórmula. Seguidamente, dá-se a definição de diferencial de uma função, sua interpretação geométrica e as regras de diferenciação da soma, diferença, produto, potência, quociente e raiz de ordem n de funções diferenciáveis. Este capítulo termina com uma página com uma tabela com as regras de derivação e um quadro resumo das derivadas de funções.

O capítulo 10 é dedicado à apresentação, demonstração, interpretação geométrica, corolários e aplicações dos teoremas de Rolle, Lagrange ou teorema do valor médio e Cauchy e à regra de L´hôpital e de Chauchy**.** Este capítulo trata também das Indeterminações. Neste ponto são apresentadas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ e 1^∞ e indicações de como as “levantar”, sendo este o termo utilizado para calcular o valor do seu limite.

O capítulo 11 trata da análise do comportamento assímptotico de uma função começando por apresentar a definição de assímptota vertical, horizontal e oblíqua. Realça a importância da elaboração correcta e o mais rigorosa possível da representação gráfica de funções. Para construir o gráfico de uma função é necessário previamente determinar: Domínio, pontos de intersecção com os eixos, pontos de descontinuidade, simetrias do gráfico (em relação à origem e ao eixo dos yy), as assímptotas do gráfico, os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos relativos, os sentidos de concavidade do gráfico, os pontos de inflexão.

É interessante verificar que se utiliza a mesma tabela para fazer o estudo dos extremos de uma função e as suas concavidades.

x	$-\infty$	$-e\sqrt{e}$		$-e$		0		e		$e\sqrt{e}$	$+\infty$
$t'(x)$	—	—	—	0	+	s/s	+	0	—	—	—
$t''(x)$	—	0	+	+	+	s/s	—	—	—	0	+
$t(x)$	↘ ∩	P.I. $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘ ∪	Máx ∩ $-\frac{1}{e}$	↗ ∪	s/s	↗ ∩	Mín ∩ $\frac{1}{e}$	↘ ∩	P.I. $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘ ∪

Fig. 28 – Tabela de extremos e concavidades

Análise

Organização e grafismo. O capítulo 7 está dividido em cinco grandes temas, o capítulo 8 em quatro temas, o capítulo 9 em onze temas, o capítulo 10 em seis temas e o capítulo 11 em dois temas. Cada tema está escrito a negrito preto em fundo azul num tamanho de letra maior que o corpo do texto. A cor azul é utilizada para realçar títulos dos subtemas ou definições e resultados importantes. As figuras utilizadas são apenas gráficos ou figuras geométricas.

Aspectos didácticos. Numa primeira abordagem as definições são dadas intuitivamente, apesar de uma forma breve, sem grandes delongas, sendo depois dadas de uma forma formal e rigorosa utilizando a simbologia da lógica matemática. A linguagem utilizada é estritamente matemática. Todas as situações dadas como exemplos ou exercícios revestem-se de um carácter estritamente matemático. A motivação dos alunos é feita através da apresentação de vários gráficos representativos das funções que estão a ser tratadas ou figuras geométricas.

Aspectos fenomenológicos. À excepção do capítulo 7, onde se refere que o número e se designa por esta letra em homenagem a Euler (p. 134) e do capítulo 9 em que se vê que a determinação da recta tangente a uma curva num dos seus pontos foi um dos problemas que esteve na origem do Cálculo Diferencial (p. 178), não existe qualquer outra referência à história da matemática nem à utilização de tecnologia. Não são utilizados casos da vida quotidiana para ilustrar alguma situação. Quanto à relação da Matemática com as outras áreas do conhecimento é apenas referido que o conceito de derivada é muito importante pelas suas várias aplicações na Matemática, Física e outras ciências (p. 179).

Infinito 12

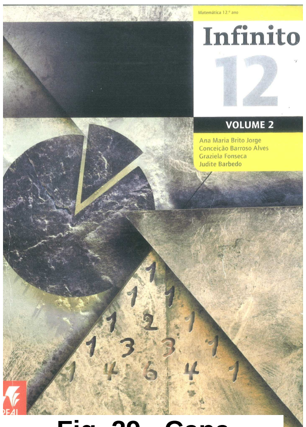


Fig. 29 - Capa

Este manual foi publicado em 1999, pela Areal Editores e é constituído por 3 volumes. O primeiro volume é dedicado ao tema das Probabilidades e Combinatória, o 2.º volume à Introdução ao Cálculo Diferencial II e o 3.º volume à Trigonometria e Números Complexos. Os autores deste manual são Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barroso Alves, Graziela Fonseca e Judite Barbedo. As dimensões aproximadamente 21cmx27cm sendo maior que qualquer um dos anteriores.

Este manual foi elaborado segundo os preceitos do programa que entrou em vigor em 1997/1998.

Nas primeiras páginas de cada volume deste manual faz-se a transcrição do programa do 12.º ano respeitante ao tema tratado assegurando a respectiva legitimidade.

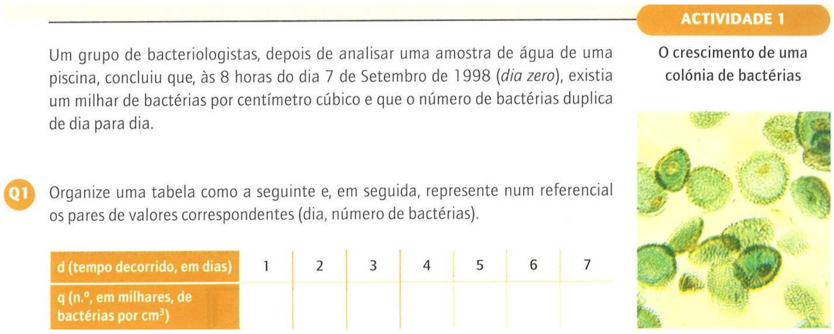
Descrição

Embora este manual tenha o 2.º volume todo dedicado ao Cálculo Diferencial, este tema também é abordado no 1.º subtema do 3.º volume denominado Funções seno, co-seno e tangente.

No 2.º volume, o tema Cálculo Diferencial está dividido nos 8 subtemas seguintes:

1- Função exponencial de base superior a um.
2- Função logarítmica de base a $(a>1)$. Logaritmo de um número
3- Limite de uma função segundo Heine
4- Continuidade
5- Teorema de Bolzano-Cauchy
6- Assímptotas
7- Funções deriváveis
8- Derivada da função exponencial $x \to e^x$

Cada subtema abre com um conjunto de várias actividades. Com excepção do 3.º e do 4.º, todos os subtemas apresentam um conjunto de algumas páginas com exemplos de aplicação dos assuntos aí abordados. No fim de cada tema e portanto do volume é apresentado um conjunto de 45 páginas com exercícios e problemas. No final destas páginas são dadas as soluções.



ACTIVIDADE 1

O crescimento de uma colónia de bactérias

Um grupo de bacteriologistas, depois de analisar uma amostra de água de uma piscina, concluiu que, às 8 horas do dia 7 de Setembro de 1998 (*dia zero*), existia um milhar de bactérias por centímetro cúbico e que o número de bactérias duplica de dia para dia.

Q1 Organize uma tabela como a seguinte e, em seguida, represente num referencial os pares de valores correspondentes (dia, número de bactérias).

d (tempo decorrido, em dias)	1	2	3	4	5	6	7
q (n.º, em milhares, de bactérias por cm³)							

Fig. 30 – Exemplo de uma actividade

Na primeira rubrica do primeiro subtema começa-se por fazer o estudo das propriedades analíticas e gráficas de funções definidas por $f: x \rightarrow a^x$ (com $a>1$). A partir de um exemplo concreto de uma função e com o auxílio da calculadora gráfica estuda-se o seu domínio, sinal e zeros, paridade, sentido de variação e o estudo da função para valores positivos de x muito grandes e para valores de x negativos, com valor absoluto muito grande. Após este estudo intuitivo é dada a definição de função exponencial de base a com $a>1$. O estudo feito para o exemplo inicial generaliza-se para qualquer função exponencial de base $a>1$. Utilizando a metodologia anterior, as regras operatórias das funções exponenciais são apresentadas sem qualquer demonstração. São apresentadas todas as características da família da função exponencial de base $a>1$. É referido que a função exponencial de base e denominada exponencial natural tem um particular interesse no estudo de vários fenómenos naturais, no entanto nada é referido sobre o número e pois este número já é conhecido dos alunos no 11.º ano como sendo o número de Neper, conforme referência no último subtema (p. 152).

Para abordar o crescimento exponencial é feito um estudo comparativo do crescimento de uma função exponencial e de uma função potência através de gráficos e uma tabela.

O segundo subtema inicia com o estudo do logaritmo de um número. Partindo da resolução da actividade inicial e da análise de um quadro de valores calculados para uma função exponencial de base 10 e para a função logaritmo com a mesma base (os valores desta função foram obtidos através da função LOG da calculadora gráfica) diz-se que a primeira função é inversa da segunda. O logaritmo de um número positivo na base 10 é apresentado como um expoente a que é necessário elevar a base 10 para se obter esse número. Esta definição de logaritmo é generalizada a uma base a com $(a \in IR^{+} \wedge a \neq 1)$ numa forma mais rigorosa e simbólica. É então apresentada a função logarítmica como função inversa da função exponencial de uma forma mais formal, utilizando a notação f^{-1} para a definir sendo f a função exponencial. São também apresentadas as características da função logarítmica. Este subtema termina com a apresentação das as regras operatórias dos logaritmos.

No 3.º subtema, dá-se a definição rigorosa do conceito de limite de uma função segundo Heine. O conceito de limite já tinha sido dado intuitivamente no 10.º e 11.º anos recorrendo ao estudo numérico e gráfico.

> Sendo **f** uma função real de variável real, diz-se que
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
>
> se e só se a **qualquer sucessão (x_n)** de termos pertencentes ao domínio de **f** que tende para **a** (finito ou infinito) por valores diferentes de **a**, corresponde uma sucessão de imagens **$f(x_n)$** que tende para **b**.

Fig. 31 – Definição de limite de uma função num ponto segundo Heine

São também definidos limite à esquerda e à direita de um número. Em relação ao conceito de limite são dadas as propriedades: unicidade do limite de uma função e limite de uma função constante. Estas propriedades são demonstradas com o apoio de um contra-exemplo para cada.

De forma análoga ao estudo do limite de sucessões no ano anterior enunciam-se seis propriedades operatórias de limites de funções num ponto. Na rubrica seguinte o estudo do limite de uma funções conduz às indeterminações $\frac{0}{0}, +\infty - \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \frac{+\infty}{+\infty}, \ 0 \times \infty$ que significam que não se pode concluir directamente qual o valor desse limite. Então é dado o processo para encontrar esse valor e feita a sua confirmação através da visualização gráfica. Quando se encontra o valor do limite após o processo utilizado, é referido que a indeterminação “desaparece”(p. 85).

A partir do exemplo que conduziu à indeterminação $+\infty-\infty$ surge pela primeira um teorema. Este teorema é sobre o limite de uma função polinominal (p. 80) e é apresentada a sua demonstração. Na sequência do exemplo que conduziu à indeterminação $\frac{+\infty}{+\infty}$ surge o segundo teorema e é um resultado sobre o limite de uma função racional. Na última rubrica, faz-se uma referência à determinação do limite de uma sucessão de números reais considerando as sucessões como restrições de funções ao conjunto IN.

O quarto subtema começa com a noção intuitiva de continuidade de uma função num ponto do seu domínio seguida da definição simbólica de função contínua, função continua à direita e função continua à esquerda num ponto do seu domínio. É depois generalizado o conceito de continuidade de uma função a um subconjunto do seu domínio, finalizando com a definição de função contínua. Na rubrica seguinte são dadas as operações com funções contínuas onde a partir das propriedades dos limites estudadas são apresentadas como funções continuas a função soma, diferença, produto e quociente de duas funções contínuas, assim como a função potência e a função raiz de uma função contínua. Também relativamente à função composta de duas funções contínuas, à função polinomial, à função racional, à função exponencial e à função logarítmica diz-se que se prova que são funções contínuas mas não são dadas demonstrações.

O quinto subtema é totalmente dedicado ao estudo do Teorema de Bolzano-Cauchy também denominado de teorema dos valores intermédios e seu corolário. É referido que este teorema é importante na pesquisa de zeros das funções reais de variável real. A partir da actividade inicial e da análise de dois gráficos é dado o teorema de Bolzano-Cauchy de forma intuitiva para depois passar à definição rigorosa e simbólica do mesmo.

No sexto subtema começa-se pelo estudo das assímptotas verticais e depois das assímptotas não verticais. É feita uma referência à noção intuitiva de assímptota vertical que os alunos já conheciam passando para a definição rigorosa e simbólica da mesma. Seguidamente, estuda-se intuitivamente primeiro e rigorosa e simbólica depois a noção de assímptota horizontal e passa-se para a noção de assímptota oblíqua.

No sétimo subtema a partir de um exemplo são recordadas as noções intuitivas e as definições rigorosas de velocidade média e de velocidade instantânea. A velocidade instantânea de um ponto num instante t_0 é definida como sendo o limite da velocidade média entre os instantes t_0 e t_0+h, quando h tende para zero. Refere-se que a esse limite também foi dado o nome, no ano anterior de derivada da função para $t=t_0$. Depois de definir declive de recta secante e declive da recta tangente a um gráfico é dada a definição rigorosa de derivada de uma função num ponto. A expressão da definição de derivada é dada com dois aspectos diferentes (p. 124). De seguida é dada a definição de função derivada e as notações mais usuais para a definir: $f^{'}, y^{'}$, Df , $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$. É também dada a definição de derivada à esquerda e derivada à direita de uma função num ponto. Na rubrica seguinte faz-se a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto concluindo-se que é o declive da recta tangente à função nesse ponto. Seguidamente é apresentado o teorema que relaciona derivabilidade com a continuidade de uma função e é feita a sua demonstração mas como uma nota dizendo que segundo o programa é facultativa. Na última rubrica são dadas as regras de derivação onde é apresentada e demonstrada a regra da derivada da soma, do produto, do quociente (esta demonstração tmabém é facultativa de acordo com o programa). Também são apresentadas a regra da função constante e da potência de expoente racional não nulo. Por fim são apresentados dois quadros síntese, um com as regras de derivação e outro com as derivadas das funções mais usuais.

No último subtema após a observação de uma gráfico e recorrendo ao uso da calculadora gráfica estuda-se o declive da recta tangente à função exponencial de base e no ponto (0,1). Partindo deste estudo determina-se a derivada da função exponencial de base e e determina-se o valor do $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. Numa nota na margem denominam $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ como limite notável. Destacadamente consideram uma segunda definição para o número de Nepper (pressupõe-se que a primeira foi dada no ano anterior).

2.ª definição do número e

A única função cuja derivada é ela própria, é a exponencial de base **e**.

$$(e^x)' = e^x$$

Fig. 32- 2.º definição do número e

A rubrica seguinte começa pelo estudo de dois limites notáveis relativos a logaritmos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x-1}$. Termina com o estudo da derivada da função logarítmica. A regra da derivada da função composta ou regra da cadeia, como é referido é dada através de um teorema (p. 156). Esta regra é apresentada sem demonstração. Noutra rubrica é recordado como se relaciona a variação e os extremos relativos de uma função com o sinal da primeira derivada se ela existir. São apresentados quadros de variação.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
f'		+	0	−	nd	+	0	−	
f		↗	1	↘	−3	↗	1	↘	

Fig. 33 – Quadro de variação

Na penúltima rubrica deste subtema é definida a segunda derivada ou derivada de 2.ª ordem como uma nova função e usando a notação f'' apresentando, no entanto outras. De seguida é dada a noção de derivada de ordem n. É feito o estudo par se conhecer o sentido da concavidade de uma função. A última rúbrica trata do estudo analítico de funções.

No 1.º subtema do 3.º volume o Cálculo Diferencial começa com estudo intuitivo do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}$ a partir da análise dos gráficos obtidos na resolução das actividades iniciais. Após de se formular uma conjectura que o valor desse limite é 1 é feita a demonstração, embora seja facultativa de acordo com o programa. Por fim estuda-se a derivabilidade das funções seno, co-seno e tangente.

Análise

Organização e grafismo. O manual está dividido por temas, sub-temas e rubricas. Os subtemas são numerados e apresentados no início da página. As rubricas não são numeradas e surgem em qualquer parte da página. Embora o tamanho da letra dos subtemas seja maior que o das rubricas, em ambos está escrito com um tamanho de letra superior ao resto do corpo do texto. Todo o texto está escrito a preto, com os títulos dos subtemas, rubricas e assuntos que os autores consideram relevantes escritos a negrito. Os assuntos que os autores querem destacar estão dentro de rectângulos delineados a castanho. As margens das páginas deste manual são utilizadas para apresentar propostas numeradas, informações, notas, pequenos gráficos e imagens de matemáticos.

Este manual contém várias tabelas, gráficos e esquemas que utilizam diversas cores. Também surgem várias fotografias que retratam situações da vida real exploradas nas actividades iniciais de cada subtema.

Aspectos didácticos. Cada subtema é iniciado por uma ou duas actividades quase sempre ligadas a situações concretas ou à identificação de modelos matemáticos para o aluno tentar resolver. A partir dessas actividades são dados de forma intuitiva e informal os conceitos utilizando muitas vezes a calculadora gráfica e só então parte para um estudo mais formal onde não é descurado o rigor mas utilizando um mínimo de linguagem simbólica. São feitas poucas demonstrações e algumas delas têm um carácter facultativo de acordo com o respectivo Programa. Há uma preocupação em verbalizar os raciocínios onde os autores recorrem recorrem a interpolação directa ao aluno, como por exemplo na página 22 do 2.º volume *“Sendo* $a > 0$*, o que representa* a^x*, se x for um número irracional?”* ou na página 32 do 3.º volume: *“Existirá* $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$ *?”*.

Para motivação os autores recorrem a muitas tabelas, gráficos e visualização dos ecrãs das calculadoras gráficas. Seguindo o que é preconizado no Programa de Matemática, a resolução de problemas é um tema transversal a todo o tema do Cálculo Diferencial. O mesmo acontece com a modelação matemática. No 2.º volume foram dedicadas seis páginas específicas à resolução de problemas e outras tantas à modelação matemática.

Aspectos fenomenologicos. Neste volume aparecem com frequência referências a situações do quotidiano: sobre o crescimento exponencial, fala-se em plantar nenúfares num lago (p. 30) e há uma referência à comunicação social onde este crescimento é muitas vezes citado (p. 30), relativamente à continuidade fala-se da tabela de preços de um estacionamento (p. 88), sobre a velocidade dá-se o conta-quilómetros de um veículo e um radar (p. 120), entre outros. Também são referidas outras ciências: Biologia através do estudo do crescimento de uma população e o desenvolvimento florestal (p. 24), Química através da desintegração radioactiva (p. 26), Física com o estudo do ruído, Economia com o cálculo do custo marginal (p. 118), Medicina com infecção cutânea (p. 129). São também referidos outros fenómenos como tremores de terra (p. 45).

Este volume tem várias referências à história da matemática. Começa logo pela introdução do volume que dá a conhecer a vida e obra do matemático português José Anastácio da Cunha (p. 12-14). Também se encontra a vida, obra e respectivo retrato dos matemáticos John Napier (p. 42), Karl Weierstrass (p. 62) e Bolzano (p. 99). Também aparece a história do símbolo e (p. 39), a história do logaritmo (p. 42), história da noção de limite (p. 64), história do infinito matemático e do infinitésimo (p. 65), ainda uma breve referência à obra " Sobre o infinito" de Hilbert (p. 72). É também apresentado um artigo denominado "Limite" da Enciclopédia de D`Alembert (p.76).

O uso do computador também é referido: No 3.º volume, para fazer o estudo intuitivo do $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ pede-se para recorrer à calculadora gráfica ou ao computador.

Matemática A – 12.º ano

O manual Matemática A – 12.º ano foi publicado em 2005 pela Porto Editora e os seus autores são Maria Augusta Ferreira Neves, Luís Guerreiro e Ana Moura. Este manual foi elaborado segundo o programa que foi homologado em 2002.

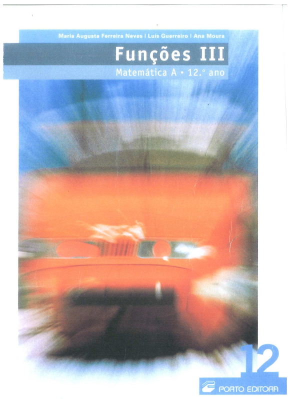


Fig. 34 - Capa

Teve a participação da conhecida professora e autora de vários manuais Maria Augusta Ferreira Neves que também já tinha participado na elaboração do manual editado em 1984 ou seja mais de 20 anos antes.

Este manual tem de dimensões 19,5cm x 26,5cm, sendo ligeiramente mais pequeno que o anterior e é constituído por 3 volumes e um caderno de actividades que está disponível em separado mas que os autores recomendam sob o ponto de vista pedagógico a sua utilização conjunta com o manual. A acompanhar este manual vem um livro exclusivo para o professor com sugestões de métodos de resolução de problemas. Tal como o manual anterior, cada volume abre com o programa oficial relativo ao tema abordado assegurando deste modo a respectiva legitimidade.

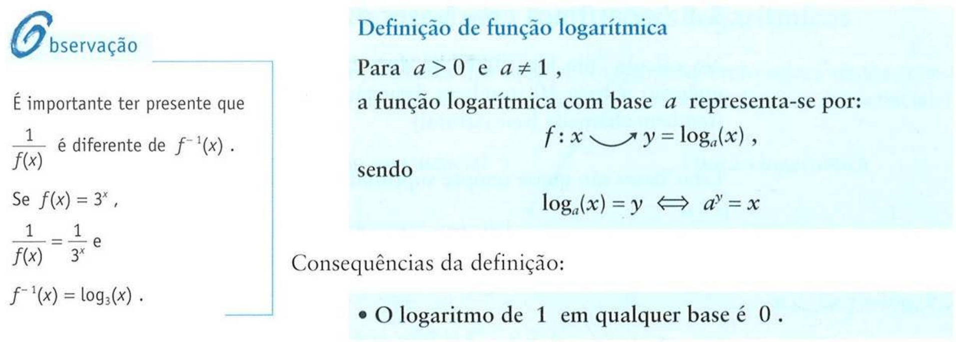
Descrição

O Cálculo Diferencial é o tema II do programa oficial e é abordado no 2.º volume denominado Funções III e também no capítulo 5 do 3.º volume dedicado à Trigonometria e Números Complexos.

O 2.º volume encontra-se dividido em cinco capítulos denominados:

1. Funções exponenciais e funções logarítmicas
2. Limites. Cálculo de limites de funções e de sucessões
3. Continuidade de uma função
4. Derivadas
5. Aplicações das derivadas

No final de cada capítulo encontra-se um conjunto de vários problemas propostos cujas soluções se encontram no final do volume. A margem esquerda do manual serve para propor exercícios ou fazer alguma observação pertinente.



Observação

É importante ter presente que $\frac{1}{f(x)}$ é diferente de $f^{-1}(x)$.

Se $f(x) = 3^x$,

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3^x}$ e

$f^{-1}(x) = \log_3(x)$.

Definição de função logarítmica

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

a função logarítmica com base a representa-se por:

$$f : x \frown\!\!\!\to y = \log_a(x) \text{ ,}$$

sendo

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

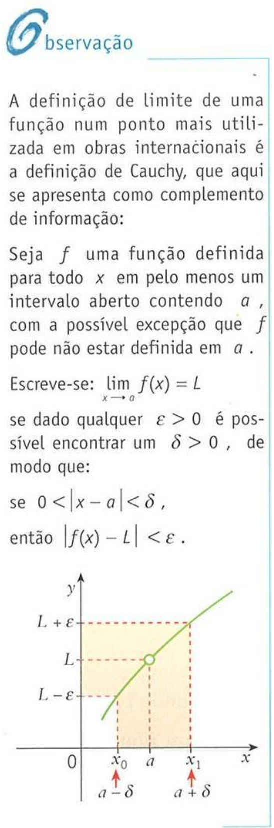
Consequências da definição:

- O logaritmo de 1 em qualquer base é 0 .

Fig. 35 – Utilização da margem esquerda

Cada capítulo está dividido em vários pontos. No final de cada ponto são dados exemplos de exercícios de aplicação da matéria tratada nesse ponto.

O 1.º capítulo é composto por quinze sub-capítulos onde se faz a introdução ao estudo das funções exponenciais de uma forma intuitiva dando depois de uma forma mais rigorosa a definição de função exponencial. As propriedades das funções exponenciais são dadas a partir de um estudo intuitivo da família de funções exponenciais de base a com $a > 1$ utilizando a representação gráfica de três funções desse tipo. Estuda-se também como obter o gráfico da função $y = a^{-x}$ a partir do gráfico da função $y = a^x$. Indica-se que as funções exponenciais são injectivas e que é essa propriedade que se utiliza na resolução de equações exponenciais, sendo resolvida como exemplo uma equação exponencial. São depois abordadas as transformações do gráfico de uma função exponencial onde é apresentada uma tabela síntese para recordar todas as transformações do gráfico de uma função. A função logarítmica é apresentada a partir da função exponencial e como função inversa desta. Segue-se o cálculo de logaritmos. Apresenta-se para o cálculo dos logaritmos a base 10 e a base e como sendo as bases que se usam com mais frequência assim como os procedimentos para se puderem calcular e obter o gráfico na calculadora gráfica. Com o objectivo de estudar as propriedades das funções logarítmicas os autores fazem um



Observação

A definição de limite de uma função num ponto mais utilizada em obras internacionais é a definição de Cauchy, que aqui se apresenta como complemento de informação:

Seja f uma função definida para todo x em pelo menos um intervalo aberto contendo a , com a possível excepção que f pode não estar definida em a .

Escreve-se: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

se dado qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um $\delta > 0$, de modo que:

se $0 < |x - a| < \delta$,

então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Fig. 36 – Limite segundo Cauchy

paralelismo das propriedades da função logarítmica com a sua inversa ou seja a função exponencial. São depois dadas as propriedades operatórias dos logaritmos: o logaritmo do produto, do quociente e da potência e feita a sua demonstração. Dá-se também a fórmula que permite a mudança de base de um logaritmo. De seguida resolvem-se equações logarítmicas através de uma equação exponencial equivalente e equações exponenciais através de logaritmos. Também se utilizam as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas para resolver analiticamente inequações com logaritmos ou exponenciais. É feita de seguida a caracterização da função inversa da função exponencial e da função logaritmo. A finalizar este capítulo são feitas aplicações das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais através de exemplos.

O 2.º capítulo inicia com a noção intuitiva de limite e a notação utilizada para esse conceito utilizando-se a mesma estratégia para apresentar os limites laterais. De seguida é apresentada a definição de ponto de acumulação, de ponto isolado e a definição de limite de uma função num ponto segundo Heine.

Definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine)

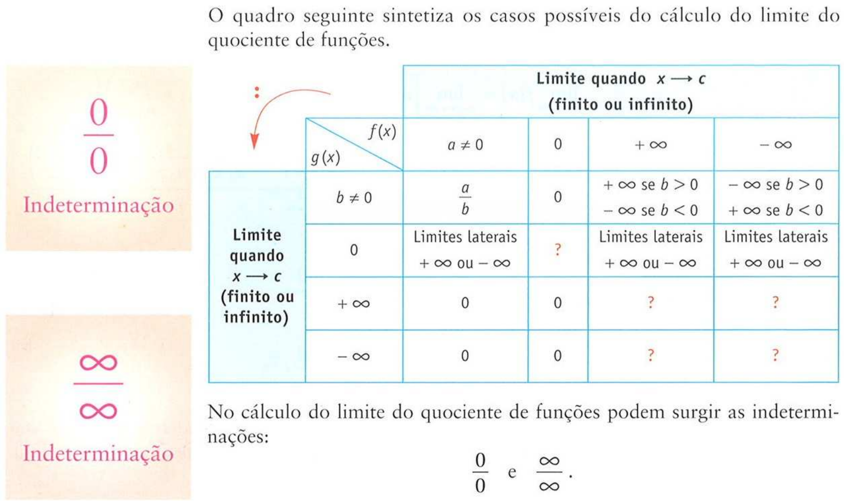
Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se e só se a toda a sucessão de valores de x do domínio de f convergente para a, sendo os termos da sucessão todos diferentes de a, corresponde uma sucessão de imagens por f convergente para b.

Fig. 37 – Limite segundo Heine

Ilustram esta definição com um gráfico. Como observação e situado na margem lateral, apresenta-se e ilustra-se com um gráfico a definição de limite segundo Cauchy considerando-a um complemento de informação. Seguidamente, apresenta-se sem demonstração as regras operatórias com limites**,** o limite da função constante, limite da função identidade, limite da soma, do produto, do quociente, da potência e da raiz. Em seguida trata-se do calculo do limite da soma, do produto e do quociente trabalham-se já com os símbolos de $+\infty$ e $-\infty$. São apresentados para cada operação um quadro onde se sintetizam todas as situações possíveis. Às situações $\infty-\infty$, $0\times\infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ são dadas os nomes de indeterminações e são bem realçadas sendo depois fornecidas as estratégias para "levantar" cada uma das indeterminações encontradas.



O quadro seguinte sintetiza os casos possíveis do cálculo do limite do quociente de funções.

		Limite quando $x \longrightarrow c$ (finito ou infinito)			
	$f(x)$ / $g(x)$	$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
Limite quando $x \longrightarrow c$ (finito ou infinito)	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$	0	$+\infty$ se $b>0$; $-\infty$ se $b<0$	$-\infty$ se $b>0$; $+\infty$ se $b<0$
	0	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$	?	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$
	$+\infty$	0	0	?	?
	$-\infty$	0	0	?	?

No cálculo do limite do quociente de funções podem surgir as indeterminações:

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty}.$$

Fig. 38 – Quadro sintese

No ponto seguinte, estudam-se os limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty$ com $p\in IR$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. No último ponto, faz-se uma revisão aos limites de sucessões, apresenta-se o $\lim(1+\frac{1}{n})^n=e$ e o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica.

O capítulo 3 inicia com a continuidade de uma função num ponto começando por observar o gráfico de uma função contínua dando depois a definição de continuidade num ponto de forma mais rigorosa. Seguidamente passa-se para a continuidade lateral começando por dar a definição intuitiva de função descontínua num ponto e de forma mais rigorosa a definição de função contínua à esquerda e continua à direita de um ponto. Depois é dada a continuidade de uma função num intervalo. Esta noção de continuidade de uma função num intervalo é dada através da observação de um gráfico de uma função e só depois através de uma definição mais rigorosa.

Se uma função é contínua em todos os pontos de um intervalo aberto $]a\ ,\ b[$, é contínua nesse intervalo.

Uma função é contínua num intervalo fechado $[a\ ,\ b]$ se é contínua em $]a\ ,\ b[$, à direita de a e à esquerda de b .

Se uma função é contínua em todos os pontos de acumulação do seu domínio dizemos, simplesmente, que a função é contínua.

Fig. 39 - Definição de função continua

Apresentam-se as operações com funções contínuas: a soma, diferença, produto e quociente de duas funções contínuas são ainda contínuas assim como a raiz e a potência de uma função contínua é ainda uma função contínua. Não é apresentada nenhuma demonstração. Apresentam de seguida o Teorema de Bolzano-Cauchy e o seu corolário sem o demonstrar. Para terminar os autores dão duas propriedades das funções contínuas (p. 109) que assinalam com asterisco dizendo que não fazem parte do corpo obrigatório do programa. Passa-se para a determinação das assímptotas do gráfico de uma função onde é dada a definição de assímptota vertical, horizontal e obliqua. Cada tipo de assimptota é ilustrado com vários gráficos.

O 4.º capítulo inicia pela introdução ao conceito de derivada começando por determinar uma equação da resta tangente a uma curva num ponto e a partir daí dá-se a definição de derivada de uma função num ponto e o seu significado geométrico. É também dada a definição de taxa de variação e a taxa de variação instantânea num ponto como sendo a derivada da função nesse ponto. Finalmente é dada a interpretação do sinal e valores relativos da derivada através da observação de um gráfico. São dadas derivadas laterais e é feita uma referência a pontos nos quais a função não é derivável.

Seja f uma função real de variável real e x_0 um ponto do domínio de f.

Diz-se que:

- f é derivável à esquerda de x_0 se existe

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

  a que se chama derivada lateral à esquerda de x_0 e se representa por $f'(x_0^-)$;

- f é derivável à direita de x_0 se existe

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

  a que se chama derivada lateral à direita de x_0 e se representa por $f'(x_0^+)$;

- existindo e sendo iguais as derivadas laterais no ponto de abcissa x_0, então a função é derivável nesse ponto e o valor desta derivada é igual ao valor comum das derivadas laterais

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-) .$$

Fig. 40 – Definição de função derivável

De seguida relaciona-se derivabilidade e continuidade através de um teorema e apesar de ser facultativa pelo programa é dada a sua demonstração. Seguidamente dá-se a função derivada e as regras da derivada de uma função constante, de uma função afim, do produto de uma constante por uma função, da da soma e da diferença de duas funções, de uma potência, das funções polinomiais, do produto de funções, de um quociente de funções, de funções compostas e de funções exponenciais e logarítmicas. Por fim é dada a função segunda derivada.

No 5.º capítulo faz-se uma revisão aos conceitos de função estritamente crescente e função estritamente decrescente, extremos de uma função, intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função. Estuda-se a relação entre máximos absolutos, mínimos absolutos, extremos relativos e a primeira derivada da função. Seguidamente faz-se um estudo à concavidade de uma função relacionando-a com a primeira e a segunda derivada de uma função. É denominado “teste da segunda derivada” a esse estudo. Finaliza-se este capítulo com o estudo de funções e problemas de optimização.

O 5.º Capítulo do 3.º volume tem o nome de “derivada das funções trigonométricas”. Nesse capítulo apenas tem interesse para o presente trabalho estudar o 1.º, 2.º e 3.º pontos. Nesses pontos faz-se o estudo intuitivo do $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ e a derivada das funções trigonométricas: $senx$, $\cos x$ e tgx. Por fim faz-se a resolução de problemas envolvendo a derivada de funções trigométricas, determinando os extremos e os pontos de inflexão utilizando tabelas diferentes.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$	2π
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	m	↗	M	↘

Fig. 41 – tabela de pontos inflexão

x	0	π	2π
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	Ponto de inflexão	$\cap$

Fig. 42 - tabela de extremos

Análise

Organização e grafismo. A forma de organizar o texto é semelhante à utilizada pela mesma autora à no manual de 1984 pois continua a utilizar a margem do livro para colocar observações, gráficos ou exercícios. No entanto, as semelhanças acabam por aí. O texto apresenta bastantes figuras, tabelas e esquemas

Do ponto de vista gráfico é um manual que utiliza bastantes cores tanto no corpo como nas imagens que utiliza. As definições são destacadas são escritas a cor preta com fundo azul.

Aspectos Didácticos. Cada capítulo abre com uma pequena introdução sobre o assunto que irá ser tratado acompanhada de uma imagem que os autores consideram que serve "*Para motivar e tornar agradável do ponto de vista gráfico...*" (Neves, 2005) e na margem esquerda os objectivos específicos desse capítulo.

O estudo dos conceitos começa por ser apresentados numa forma intuitiva e definidos numa forma rigorosa, utilizando simbologia lógica mas sem o exagero utilizado no manual dos anos 80. A preocupação com o estudo intuitivo de um conceito é expressa claramente em frases como "Noção intuitiva de limite" (p. 52) ou "Cada um de nós tem uma ideia intuitiva de continuidade" (p. 96). O estudo dedutivo também diminui como se observa quantidade de teoremas demonstrados neste manual que são mínimos em relação ao manual de 80.

Em termos de linguagem, a diferença é imensa. Enquanto no manual de 80 era apenas utilizada linguagem praticamente estritamente matemática, neste os autores recorrem muitas vezes a perguntas como forma de motivação para o assunto como por exemplo “O que é uma função exponencial?” (p. 11) ou “O que é que na vida poderá não ter limite?” (p. 52).

As referências à calculadora gráfica são constantes tanto mostrando ecrãs com tabelas ou representações gráficas (p. 18) como solicitando a sua utilização em problemas propostos (p. 49).

Aspectos fenomenológicos. Ao contrário do que acontecia no manual de 1984, este recorre a vários exemplos da vida quotidiana e de outras áreas do conhecimento. Da vida quotidiana encontra-se por exemplo problemas com derramamento de crude de um barco que teve uma avaria no mar (p. 38), propagação de um boato num grupo de pessoas (p. 39), compra de pão (p. 48). De outras áreas do conhecimento recorre-se à cultura de bactérias (p. 13) na Biologia, ao cálculo de juros (p. 19) na Economia, à radiactividade de uma substância (p. 19) na Quimica, construção de um arco, na Arquitectura (p. 46), entre outros.

Este volume apenas apresenta quatro referências à história da matemática. No entanto, já é uma diferença enorme com o manual dos anos 80 em que não havia praticamente nenhuma. Para além de uma página dedicada à história do Cálculo Diferencial apresentando em rodapé o retrato dos matemáticos Arquimedes, Napier, Isaac Newton, Liebniz, Gauss e Abel, com que abre este volume (p. 8), encontra-se a história dos logaritmos num apontamento da margem tendo como título “Observação” (p. 20), o tema derivadas abre com um pequeno apontamento sobre século em que surgiu o conceito de derivada (p. 128) e apresenta na margem do manual breves biografias de Fermat e Newton (p. 130).

Quanto ao uso de tecnologia, na apresentação do manual é referido que a cálculadora gráfica é indispensável no estudo das funções, o que vai de encontro ao proclamado no programa.

Conclusão

O primeiro manual escolar é um “livro de autor” elaborado por dois autores reconhecidos no meio académico e profissional. Os dois últimos volumes são considerados “livros de editora” onde os autores passaram a ser elementos secundários. Nos livros de editora, os programas oficiais são sempre referenciados como fonte de legitimidade.

Estes quatro livros mostram uma evolução significativa no ensino do Cálculo Diferencial ao longo de mais de quarenta anos. Começando pelo nível etário dos alunos que estudam este tema que no primeiro livro, davam no 6.º ano, actual 10.º e portanto com 15 anos passaram a dar no 12.º ano, com 17 anos nos últimos livros. A abordagem dos conceitos começa também por ser mais formal e abstracta passando a abordagens mais simples. Os dois primeiros livros utilizam uma linguagem rigorosa, com muita simbologia lógica e onde quase todos os teoremas têm demonstração enquanto nos dois últimos, poucos têm demonstração, sendo algumas facultativas por indicação dos respectivos programas. Aliás nos dois últimos manuais quase se evita utilizar o termo “teorema” substituindo-o por propriedade.

Repare-se que estes manuais acompanharam o movimento de afirmação da importância do estudo do Cálculo Diferencial. No primeiro livro analisado, o Cálculo Diferencial aparece em vários capítulos de um livro dedicado à Álgebra, no seguinte surge já num livro dedicado à matemática em geral e finalmente nos últimos dois é dedicado a este tema um volume completo e parte de outro de cada manual.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Relembrando que o presente trabalho pretendia fazer um estudo numa perspectiva histórica e didáctica, do Cálculo Diferencial no ensino em Portugal, tendo como ponto de partida o Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva, impõe-se, nesta altura tecer algumas considerações finais.

A análise à abordagem ao Cálculo Diferencial no Compêndio de Matemática revelou uma preocupação pedagógica de Sebastião e Silva no tratamento dos assuntos focados. O estudo intuitivo dos conceitos anterior à sua definição rigorosa, utilizando uma linguagem formal, rica em simbologia lógica mereceu deste brilhante pedagogo o comentário *"O ideal seria conciliar o máximo de intuitividade com o máximo de racionalidade."* (Silva, 1951). Sebastião e Silva ao ter a percepção de que nesta conciliação da lógica com a intuição *"…todo o cuidado é pouco para não cair em qualquer dos extremos…"* (Silva, 1951) fê-la com grande mestria *"…sem derrapar para os extremos formalistas que se assistia noutros países…"* (Ponte, 2003).

O tão proclamado método heurístico fez uso dele Sebastião e Silva quando inicia o Cálculo Diferencial com o estudo do Cálculo Numérico Aproximado em estreita relação com a teoria dos limites. Todo o capítulo do Cálculo Diferencial se encontra recheado de exemplos que para além de numéricos e algébricos, estão relacionados com a vida quotidiana ou outras áreas do conhecimento. *"Ao contrário do que acontecia em muitos outros países, em que se privilegiava exclusivamente a perspectiva da Matemática pura, Sebastião e Silva empenhava-se em mostrar a importância da Matemática, desenvolvendo numerosos exemplos"* (Ponte, 2003).

A aplicação da tecnologia e mais especificamente os computadores era muito importante para Sebastião e Silva tendo trabalhado em colaboração com o Laboratório Nacional da Engenharia Civil para os cálculos utilizados no Cálculo Diferencial e fazendo várias referências à sua utilidade neste tema.

A história da matemática é também muitas vezes referenciada neste capítulo. Para este matemático *"Ensinar matemática sem mostrar a origem e a finalidade* *dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio."* (Silva, 1951).

Sebastião apela à participação do aluno nos raciocínios que se vão introduzindo num estilo próprio colocando a pergunta "porquê" para justificação dos passos.

Com a análise dos manuais posteriores ao Compêndio de Matemática verifica-se que nas várias abordagens ao Cálculo Diferencial muitas das considerações atrás citadas lá se encontram, umas numa forma mais explícita, outras numa forma mais velada. O primeiro manual utilizando uma linguagem formal carregada de simbologia lógia, nada diz sobre a aplicabilidade dos conceitos, não tem quase nenhuma referência histórica não deixa, no entanto de fazer um breve estudo intuitivo dos conceitos. Os seguintes para além de insistirem no estudo intuitivo dos conceitos, utilizam imensos exemplos da vida quotidiana ou de outras áreas do conhecimento, falam da história da matemática mas a linguagem utilizada na definição dos conceitos apesar de rigorosa deixa de ser tão formal e com um mínimo de simbologia lógica o que vai de acordo com o que é preconizado nos programas a que cada manual corresponde.

Após este trabalho, torna-se evidente o contributo relevante de Sebastião e Silva para o ensino do Cálculo Diferencial tendo em conta a renovação dada a este tema com uma abordagem mais actual dos conceitos, uma interligação dos conteúdos e uma aplicação destes à vida quotidiana pois para este brilhante matemático *"…a matemática não é só lógica, a matemática é um produto do humano, intimamente ligado às necessidades do homem, à sua existência sobre este planeta"* (Silva, 1951).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aires, A. P. F. & Vásquez, M. S. (2005). O conceito de derivada no ensino secundário ao longo do século XX. In História do Ensino da Matemática em Portugal. Lisboa, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Akkar, M. (2002). L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire maghrébin. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 34(4*), 179-185.

Astudillo, M. T. G. (2010). *La Matemática Moderna en España.* In *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos*. Lisboa, Portugal: Conselho Nacional de Educação.

Associação Portuguesa de Matemática (1988). *A renovação do currículo de matemática*. Lisboa, Portugal: APM.

Batista, R. J. (2010). *Uma breve introdução à história do Cálculo Diferencial e integral*. Curitiba, Brasil: Colégio Militar de Curitiba.

Beato, C. A. S. (2004). A política do livro único na reforma liceal de 1947: o caso da disciplina de ciências físico-Químicas. *Cadernos de História da Educação, 3*, 55-64.

Carvalho, R. (1986). *História do Ensino em Portugal*. *Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de de Salazar.* Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Castelnuovo, E. (1982). *Ensino da Matemática Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva.* Lisboa, Portugal: SPM

Castelnuovo, E. (1987). *Didáctica de la matemática moderna*. México: Editorial Trillas

Choppin, A. (1980). L`histoire des manuels scolaires: une approche global. *Histoire de l`Éducation, 9*, 1-25.

Decreto-lei n.º 491/77 de 23 de Novembro. *Diário da República n.º 271/77 – I Série*. Ministério da Educação e Investigação Científica.

Departamento do Ensino Secundário. (1997). *Matemática – Programa 10°, 11°e 12°anos* . Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário. (1991). *Programas de Matemática e Métodos Quantitativos. Organização Curricular e Programas. Ensino Secundário.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

Ferreira, et al. (1982). *Nota biográfica*. *Ensino da Matemática Anos 80*. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. Lisboa, Portugal: SPM

Feiteira, R. & Pires, M.(2008) Reflexões sobre os currículos de matemática em Portugal. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16,*183-196*.*

Garcia, M. (2003). Entrevista com Madalena Garcia. *Gazeta de Matemática, 144*, 4-7.

Gil, J. M. (1982). *Ensino da Matemática Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva*. Lisboa, Portugal: SPM.

Jorge, A. M. B., Alves, C. B, Fonseca, G. & Barbedo, J. (1999). *Infinito 12*. Porto, Portugal: Areal Editores.

Lourenço, A. M. F.A. S.(1997). *O discurso pedagógico em manuais escolares: uma análise sociológica centrada nas ciências naturais do 7.º ano de escolaridade.* Tese de mestrado. Lisboa, Portugal: Universidade de Lisboa

Maria, E. (2002). *Conexões Matemáticas num contexto de actividades de aplicação, investigação e modelação de matemática.* Tese de Mestrado. Lisboa, Portugal: Universidade Nova de Lisboa.

Moreira, D. & Matos, J. (2005). História do Ensino da Matemática em Portugal. Lisboa, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática**.**

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *5*, 91-110.

Mosquera, J. (2010). *Matemática Moderna y neocolonialismo en Venezuela.* In *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos*. Lisboa, Portugal: Conselho Nacional de Educação

Neves, M. A. F., Vieira, M. T. C. & Alves, A. G. (1984). *Livro de texto. 12.º Matemática*. Porto, Portugal: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Moura, A. (2005). *Matemática A*. *12.º ano.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Oliveira, M. C. A. (2008). O ensino de Matemática veiculado em livros didácticos publicados no Brasil: conjuntos numéricos e operações na coleção moderna de Osvaldo Sangiorgi. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15,* 125-137.

Pardal, A. & Correia, E. (1995). *Métodos e técnicas de investigação social*. Porto, Portugal: Areal.

Ponte, J. P. (1993). A educação matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante, 2,* 95-125.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P. (2003). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* in *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas*. Lisboa, Portugal: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática, 4*(8), 149-170).

Proença, M. C. (1998). *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa, Portugal: Edições Colibri.

Santos, L, Canavarro, A. P. & Ponte, J. P.(2000). *O currículo de Matemática: que problemas? Que mudanças?* In *Actas do ProfMat 2000.* Lisboa, Portugal: APM.

Silva, J. S. (1951). A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário*. Gazeta de Matemática, 49,*1-4.

Silva, J. S.& Paulo, J. D. S (1963). *Compêndio de Álgebra.* Lisboa, Portugal: Depositária Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, J. S. (1975a). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.1.Tomo 1.* Lisboa, Portugal: GEP

Silva, J. S. (1975b). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.1.Tomo 2*. Lisboa, Portugal: GEP

Silva, J. S. (1975c). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do ensino secundário. Vol.3.* Lisboa, Portugal: GEP

Silva, J. S. (1977b). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática* (2.º e 3.º Volumes). Lisboa, Portugal: Edição GEP.

Silva, J. S. (1977a). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática (1.º Volume).* Lisboa, Portugal: Edição GEP.

Silva, J. S. (1978). *Compêndio de Matemática. Ano Propedêutico*. Vol.2. Lisboa, Portugal: GEP.

Silva, M. C. L.& Valente, W. R. (2008). A Matemática Moderna em Portugal: o que dizem os cadernos escolares dos alunos. *Quadrante, XVII*, 78-92.

Rosas, F. (1994). *O Estado-Novo (1926-1974). In História de Portugal (7.º Volume)*. Lisboa, Portugal: Círculo de Leitores.

Sebastião, J. (2002). *O papel do sociólogo na escola inclusiva.* In *A Sociologia e o Ensino Secundário: Lugares, Saberes, Itinerários – Actas do Encontro Temático Intercongressos*. Oeiras, Portugal: APS

Sierra-Vásquez, M., González-Astudillo, M. T., & López-Esteban, C. (2003). El concepto de continuidade em los manuales españoles de enseñanza secundária de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática,15,* 21-49.

Torres, T. I. M. & Giraffa, L. M. M (2009). O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao Moodle*. REVMAT – Revista Electrónica de Educação Matemática, 4,* 18-25.

Valente, W. R. (2006). A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil: um tema para estudos históricos comparativos. *Revista Diálogo Educacional, 6,* 19-34.

Pinto, N. B. (2008). Marcas e Implicações da Matemática Moderna nas práticas escolares. Retrieved 27 de Abril de 2011, from http://www.ice.edu.br/TNX/storage/webdisco/2008/12/19/outros/1728dae5ceada32dc7a2ff82f7ade1f1.pdf

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Retrieved 11 de Setembro de 2010, from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf

Secretaria geral do ministério da Educação, património Educativo retrieved 10 de Outubro, from http://www.sg.min-edu.pt/pt/patrimonio-educativo/museuvirtual/documentos/ministerio-da-instrucao-publica/